АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

4677—5012

*

№ 9 **1954**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Амбатов, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский, Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 2
Основания математики и математическая логика 3
Теория чисел 5
Алгебра 10
Многочлены и линейная алгебра 10
Группы 11
Поля, кольца и структуры 13
Топология 15
Теория функций действительного переменного 18
Теория множеств 20
Приближение функций полиномами и их обобщениями 22
Теория функций комплексного переменного 25
Дифференциальные уравнения 28
Обыкновенные дифференциальные уравнения 28
Уравнения в частных производных . . . 30
Приложения к физике, технике и естественным наукам 32
Интегральные уравнения . . . . . —
Приложения интегральных уравнений . —
Вариационное исчисление 36
Анализ (другие вопросы) 37
Числовые ряды 37
Специальные функции 40
Интегральные преобразования и операционное исчисление 40
Приложения общих методов математического анализа 40
Функциональный анализ 41
Теория вероятностей 44
Математическая статистика 47
Теория игр 50
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . 50
Геометрия 52
Приложения геометрии 52
Проективная и начертательная геометрия 53
Алгебраическая геометрия 53
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 54
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 56
Метрические методы в геометрии . . . 58
Геометрия выпуклых многообразий . . 58
Численные и графические методы 59
Таблицы 64
Алгебра электрических цепей . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 65
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . 76
Авторский указатель . . . . . I—III

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 4677—5012 **№ 9** **Сентябрь 1954 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

4677. Работа Консультативного отделения Института математики Академии наук Китая. Лу Ци-цзянь (中國科學院數學研究所的討論班工作. 陸啓鏗), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1954, № 2, 79—80 (кит.)

4678. Математика и строительство. Цянь Вэй-чжан (工程和數學. 錢偉長), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1954, № 2, 42—46, 34 (кит.)

4679. Первое заседание. Речь президента Венгерской академии наук Иштвана Русняка, посвященная открытию заседания Академии (Megnyitó ülés. Rusznyák István, A Magyar tudomanoys akadémia elnökének elnöki megnyitója), Magyar tudomán. akad. Mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 2, 123—129 (венг.)

Сообщение о первом заседании торжественной сессии Венгерской академии наук, посвященной 150-летию со дня рождения Яноша Бойаи. Кроме речи президента Венгерской академии наук, публикуются приветственные выступления руководителей делегаций математиков ряда стран и телеграммы, присланные по случаю 150-летия со дня рождения Бойаи.

4680. Заметки о задачах математики после создания Чехословацкой академии наук. Чех (Poznámky o úkolech matematiky po zřízení Československé akademie věd. Čech Eduard), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 5—9 (чеш.)

4681. Сотрудничество Чехословацкой академии наук с Карловым университетом в области математики. Коржинек (Spolupráce Československé akademie věd a Karlovy university v oboru matematiky. Kořínek Vladimír), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 11—12 (чеш.)

4682. К проблематике наших математических организаций. Шварц (K problematike našich matematických pracovísk. Schwarz Štefan), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 13—16 (словац.)

4683. Заметки о научном центре. Марчевский (Poznámky o vědeckém středisku. Marczewski Edward), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 31—45 (чеш.)

Перевод с польского статьи, посвященной опыту польской математической школы.

4684. Английская печать о конгрессе польских математиков (Angielskie sprawozdanie z Kongresu matematykow polskich. A. J.), Wszechświat, 1954, № 2, 40 (польск.)

Краткое изложение заметки из журнала «Nature» (РЖМат, 1954, 4289).

4685. Сообщение о собрании членов Германского математического объединения 7 сентября 1952 г. в Высшей технической школе Мюнхена (Bericht über die Mitgliederversammlung der DMV am 7. Sept. 1952 in der Technischen Hochschule München), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1953, **56**, № 2/3, ч.2, 64—68 (нем.)

4686. 28-е заседание Международного статистического института. Шметтерер (28. Sitzung des Internationalen Statistischen Instituts. Schmetterer L.), Internat. math. Nachr., 1953, **8**, № 29/30, 10—11 (нем.)

4687. Институт математики университета. Имас-Янке (El Instituto de matemáticas de la Universidad. Imaz Jahnke Carlos), Univ. México, 1953, **8**, № 3, 26—27 (исп.)

Краткие сведения о работе Института математики в Мексико.

4688. Летнее собрание в Кингстоне (The Summer meeting in Kingston), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 6, 515—568 (англ.)

Приводятся краткие резюме докладов, представленных 58-му Летнему собранию Американского математического общества 31 августа — 5 сентября 1953 г.

4689. Осеннее собрание Японского математического общества. Такасу (Autumn meeting of the Japanese Mathematical Society, Kyoto University, October 28—31, 1953. Takasu T.), Internat. math. Nachr., 1953, **8**, № 29/30, 12—13 (англ.)

Приводятся названия докладов, прочитанных на заседаниях Японского математического общества с 28 по 31 октября 1953 г.

4690. Две лекции по философским вопросам математики. Гнеденко Б. В., Наукові зап. Київськ. держ. ун-та, 1953, **12**, № 7, 5—36

Статья содержит краткое популярное изложение ряда вопросов, относящихся к двум темам: 1) о предмете и методе математики, 2) математика и практика. Почти все положения, высказываемые в статье по этим вопросам, известны и могут быть найдены в других работах, цитируемых автором (например, Колмогоров А. Н., БСЭ, изд. 1, 1938, **38**, 359—401, и др.). Изложение по большей части беглое, и ряд вопросов только намечен. Так, например, раздел о методе математики ограничивается лишь общим указанием на абстрактность математических понятий и значение абстракций. Далее, говоря о влиянии практики на развитие понятия числа, автор трактует практику расширительно, как бы причисляя к ней, в частности, математическую задачу решения уравнений, приведшую к понятию комплексного числа. Однако такое понимание не развито, хотя без должного анализа и пояснений оно представляется спорным, ибо так можно всякую математическую задачу рассматривать как практическую. *А. Д. Александров*

4691. Дискуссия по поводу статьи Долежала «Математика в технике и физике». Грушка (Diskusní příspěvek k článku Doležal: Matematika v technice a ve fysice (Sl. O. **14** (1953), čis. 10, str. 446). Hruška V.), Slaboproudý obzor, 1954, **15**, № 2, 91—92 (чеш.)

4692. Обучение математике в университетах. Вейль (Mathematical teaching in universities. Weil André), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 34—36 (англ.)

Тезисы доклада, сделанного на объединенном заседании Нанкагского математического общества и Полдавской математической ассоциации. Выдвигаются, между прочими, следующие положения: хорошие результаты могут быть получены только при условии соответствующих реформ как обучения в школе, так и в университете, причем усилия математиков должны быть направлены на необходимые улучшения школьных программ и подготовки учителей математики; обучение математике в университетах должно отвечать потребностям практических приложений математики, готовить специалистов-математиков и давать всем студентам подлинно университетское образование в области магематики.

При отборе вопросов, подлежащих включению в программу, следует руководствоваться следующими положениями: важность вопроса в системе современной математики или с точки зрения приложений к современной физике и технике, связь вопроса с другими дисциплинами учебного плана, трудность и общность развиваемых в данном вопросе идей. Эти положения требуют пересмотра действующих программ; так, идея функции, процессы дифференцирования и интегрирования должны излагаться рано вследствие их громадного значения как в теоретическом, так и в практическом отношении; необходимо, чтобы методы приближенных вычислений и связанные с ними вопросы были шире представлены в программах, чем в настоящее время.

Примечание референта. Хотя многие положения автора не вызывают возражений, нельзя согласиться с имеющимся в тезисах принижением роли учебников и самостоятельной работы студентов над литературой. *В. И. Левин*

4693 РЕЦ. Математические сочинения П. Руффини. Т. 2 (Opere matematiche di Paolo Ruffini. Tomo secondo, XIV+510 pp., Roma, Edizioni Cremonese, 1953, 5000 L.) [**Рецензия: Тольятти** (Togliatti Eugenio G.), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 2, 208—210 (итал.)]

См. также: 4710

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

4694. К 250-летию «Арифметики» Л. Магницкого. Отрадных Ф. П., Вестн. Ленигр. ун-та, 1953, № 11, 67—71

Дается краткое изложение содержания «Арифметики» Магницкого. При изложении основных биографических сведений о Л. Ф. Магницком высказывается сомнение, впрочем неаргументированное, в том, что он учился в Московской славяно-греко-латинской академии.

На стр. 68—69 переставлены местами подписи к фотокопиям двух страниц из «Арифметики».

В. Ф. Рогаченко

4695. Об одной работе М. В.Остроградского. Свешников (Despre o lucrare a lui M. V. Ostrogradschi. Sveşnicov A. G. (Uspehi matematiceschih nauc, 1953, 8, № 1), An. Rom.-Sov., Ser. mat.-fiz., 1954, № 1, 19—20 (рум.)

Перевод статьи из журнала «Успехи матем. наук» (см. РЖМат, 1953, 513).

4696. Заметка о теории тепла (прочитана на заседании Академии 5 ноября 1828 г.). Остроградский (Notă asupra teoriei caldurii (Citită in sedinta Academiei din 5 noembrie 1828). Ostrogradschi M. V.), An. Rom.-Sov., Ser. mat.-fiz., 1954, № 1, 21—28 (рум.)

Румынский перевод заметки М. В. Остроградского (см. РЖМат, 1953, 514).

4697. Из речи В. А. Стеклова на праздновании столетнего юбилея со дня рождения М. В. Остроградского, организованном кружком любителей математики в Полтаве (Din cuvântarea lui V. A. Steclov cu ocazia jubileului de 100 de ani dela nasterea lui M. V. Ostrogradschi, organizat de cercul amatorilor de matematica din Poltava), An. Rom.-Sov., Ser. mat.-fiz., 1954, № 1, 20—21 (рум.)

См. РЖМат, 1953, 515.

4698. Спиноза и теория вероятностей. Дутка (Spinoza and the theory of probability. Dutka Jacques), Scripta math., 1953, **19**, № 1, 24—33 (англ.)

В статье приводится английский перевод небольшой заметки «Исчисление вероятностей» («Reeckening van Kanssen»), впервые напечатанной на голландском языке в 1687 г. и вновь опубликованной Бьеренсом де Жаном в 1884 г. Авторство этой заметки приписывается Спинозе. Заметка содержит пять задач, заимствованных из сочинения Гюйгенса «О расчетах в азартных играх», 1657 («Van Rekeningh in Spelen van Geluck», Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, v. 14, La Haye, 1920) и дает решение первой из них. Автор статьи сопровождает свой перевод анализом решения. К статье приложено воспроизведение оригинального издания заметки. *Л. Е. Майстров*

4699. Андрей Николаевич Колмогоров (К 50-летию со дня рождения) (Andriej Nikołajewicz Kołmogorow (W pięćdziesiątą rocznicę urodzin). L. S.), Matematyka, 1953, **6**, № 6, 42—44 (польск.)

4700. Работы академика А. Н. Колмогорова по теории вероятностей. Михок (Opera academicianului A. N. Colmogorov in teoria probabilităţilor. Mihoc G.), An. Rom.-Sov., Ser. mat.-fiz., 1954, № 1, 105—118 (рум.)

Обзор, написанный в связи с 50-летием академика А. Н. Колмогорова, отмечавшимся в 1953 г.

4701. Сергей Сергеевич Бюшгенс. (К семидесятилетию со дня рождения). Фиников С. П., Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 4, 185—192

Очерк научной деятельности и перечень опубликованных работ юбиляра.

4702. Молодой член-корреспондент Академии наук С. Н. Мергелян. Чэн Юань (年青的通訊院士——謝·尼·麥爾格利安. 程宪), 科學大衆 (Кэсюэ дачжун), 1954, № 2, 65 (кит.)

4703. Некролог: Морис Дьюэк (1904—1953). До (Obituary: Maurice Deweck (1904—1953). Deaux R.), Mathesis, 1953, **62**, 81—84 (англ.)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1050.

4704. Вольфганг Штернберг. Шефер (Wolfgang Sternberg. Schaefer Clemens), Phys Blätter, 1954, **10**, № 1, 30 (нем.)

Некролог немецкого математика и физика В. Штернберга (1887—1953).

4705 РЖЦ. Жизнь и труды Клеро (1713—1765). Брюне (La vie et l'œuvre de Clairaut (1713—1765). Brunet Pierre, 112 pp., Presses Universitaires de France, Paris, 1952, 400 fr.) [Рецензия: Кольри (Caullery M.), Arch. internat. histoire sci., 1953, **6**, № 23—24, 329—330 (франц.)]

См. также: 4724, 4952, 4994

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

4706. Одна проблема из рекурсивной теории функций. Гудстейн (A problem in recursive funktion theory. Goodstein R. L.), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 3, 225—232 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные с перенесением теоремы Ролля на рекурсивные функции.

Под классом рекурсивных функций автор, повидимому, понимает минимальный класс, содержащий функции $Z(n) = 0$, $I(n) = n$, $S(n) = n + 1$ и замкнутый относительно применения схемы порядковой рекурсии (см. РЖМат, 1953, 14) и схемы суперпозиции (хотя требование замкнутости относительно схемы суперпозиции автором и не формулируется). Рациональные числа трактуются обычным образом как тройки натуральных, а функции от рациональных чисел, принимающие рациональные же значения,— как тройки функций от трех натуральных аргументов. Тем самым понятие рекурсивной функции естественно переносится на функции от рационального аргумента.

Вводятся следующие определения: пишут $x=0(k)$, если $x \leqslant 10^{-k}$. Если $f(n, m_1, m_2, \ldots, m_p) = 0\,(k)$ при $n \geqslant R(m_1, m_2, \ldots, m_p, k)$, где R — рекурсивная функция, то пишут $\ll f(n, m_1, m_2, \ldots, m_p) = 0\,(k)$ для мажоранты $n \gg$. Функция $f(n, x)$ называется дифференцируемой на $[a, b]$ относительно n, с производной $f^1(n, x)$, если существует такая рекурсивная функция $d(k)$, что при $a \leqslant x < x^* \leqslant b$ и $x^* - x = 0\,(d(k))$ имеет место

$$\frac{f(n, x^*) - f(n, x)}{x^* - x} - f^1(n, x) = 0\,(k)$$

для мажоранты n.

Функция $f(n, x)$ называется переменной на $[a, b]$ относительно n, если существуют такие рациональные $c_1, c_2 \in [a, b]$ и натуральные v, V, что

$$f(n, c_1) - f(n, c_2) \geqslant 10^{-v} \text{ при } n \geqslant V.$$

Функция $f(n, x)$ называется постоянной в (a, b) относительно n, если для всех рациональных x, x^* из (a, b) имеет место

$$f(n, x^*) - f(n, x) = 0\,(k) \text{ для мажоранты } n.$$

Говорят, что последовательность c_k равномерно содержится в (a, b), если существуют такие α и β, что $a < \alpha \leqslant c_k \leqslant \beta < b$.

Ранее (см. Proc. London Math. Soc., 1950, сер. 2, **52**, 81—106), автор установил следующее. Если выполняется условие (A): функция $f(n, x)$ относительно дифференцируема на $[a, b]$ с относительной производной $f^1(n, x)$ и $f(n, a) = f(n, b) = 0\,(k)$ для мажоранты n, то существуют такие рекурсивные функции c_k и $R(k)$, что $a < c_k < b$ и $f^1(n, c_k) = 0\,(k)$ при $n \geqslant R(k)$. Если, кроме того, выполняется условие (B): функция $f(n, x)$ является либо относительной постоянной, либо относительной переменной, то c_k содержится в (a, b) равномерно.

В реферируемой статье строится функция $f(n, x)$, удовлетворяющая условию (A) и такая, что последовательности $f_n(x) = f(n, x)$ и $f_n^1(x) = f^1(n, x)$ равномерно сходятся на [0,1]. (Для построения используется принадлежащий Гёделю пример рекурсивной функции $g(x)$, обладающей тем свойством, что в рекурсивной арифметике выводимо каждое из равенств $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, $g(2) = 0, \ldots$, но не выводимо равенство $g(n) = 0$, где n — свободное переменное). Основная теорема 10 гласит: невозможно найти такие рекурсивные функции $x(k)$ и $V(k)$, что множество значений $x(k)$ равномерно содержится в (0,1) и $f^1(n, x(k)) = 0(k)$ при $n \geqslant V(k)$. Кроме того, доказывается что условие (B) не является необходимым для того, чтобы последовательность c_k равномерно содержалась в (a, b).

Примечание референта. Автор, хотя и не оговаривает этого явно, отождествляет истинность с выводимостью в рекурсивной арифметике. Например, утверждение

$$\ll f(n, m_1, m_2, \ldots, m_p) = 0(k) \text{ для мажоранты } n \gg$$

следует понимать в смысле выводимости в рекурсивной арифметике импликации

$$n \geqslant R(m_1, m_2, \ldots, m_p, k) \rightarrow$$
$$\rightarrow f(n, m_1, m_2, \ldots, m_p) = 0(k),$$

где n, m_1, $m_2, \ldots, m_p, k$ — свободные переменные, а R — некоторая рекурсивная функция. Точно также, утверждение теоремы 10 надлежит понимать в следующем смысле: невозможно найти такие рекурсивные функции $x(k)$ и $V(k)$ и натуральные числа $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$, чтобы обе формулы

$$1/\mathfrak{p} \leqslant x(k) \leqslant 1/\mathfrak{q},$$
$$n \geqslant V(k) \rightarrow f^1(n, x(k)) = 0(k),$$

где k и n — свободные переменные, были выводимы в рекурсивной арифметике. *В. А. Успенский*

4707. Об основаниях математики. Сколем (Consideraciones sobre los fundamentos de la matematica. Skolem Th.), Rev mat. hisp.-amer., 1953, сер. 4, **13**, № 3, 149—174 (исп.)

Продолжение статьи, ранее опубликованной автором (Rev. mat. hisp.-amer. 1952, **12**, № 3). Рассматривается построение гейтинговской (или интуиционистской) и классической арифметики, в частности, дается очень прозрачное изложение результата Гёделя, гласящего, что если в выводимой формуле классической арифметики заменить всюду $p \rightarrow q$ на $\neg(p \& \neg q)$, $p \vee q$ на $\neg(\neg p \& \neg q)$ и $(Ex)\,A(x)$ на $\neg(x)\neg A(x)$, то полученная формула выводима в исчислении Гейтинга. При построении исчисления предикатов, кроме обычных аксиом и правил (см., например, Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, М.—Л., 1947, аксиомы *e*) и *f*) на стр. 97 и правила γ1) и γ2) на стр. 99), используется введенная Гейтингом аксиома (A*x*):

$$(x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((Ex)\,A(x) \rightarrow (Ex)\,B(x)).$$

При помощи этой аксиомы устанавливается, в частности, эквивалентность формул $(x)\neg A(x)$ и $\neg(Ex)\,A(x)$ в гейтинговском исчислении предикатов, а также выводимость $(Ex)\neg A(x) \rightarrow \neg(x)\,A(x)$. Доказывается невыводимость в гейтинговском исчислении предикатов ряда формул, классически доказуемых, а именно импликаций

$$\neg(x)\,A(x) \rightarrow \neg\neg(Ex)\neg A(x),$$
$$(x)\neg\neg A(x) \rightarrow \neg\neg(x)\,A(x)$$

и

$$\neg\neg(Ex)\,A(x) \rightarrow (Ex)\neg\neg A(x).$$

Рассматриваются также некоторые матрицы, связанные с гейтинговским исчислением высказываний, теорема Гливенко, элементарное исчисление со свободными переменными и рекурсивная арифметика. Хотя реферируемая работа не содержит ничего существенно нового, метод изложения заслуживает внимания.

Примечание референта. Принятие формулы (A*x*) в качестве аксиомы (стр. 158) излишне, потому что эта формула может быть выведена из остальных аксиом гейтинговского исчисления предикатов следующим образом: присоединяем к аксиомам $(x)(A(x) \rightarrow B(x))$; тогда становится выводимой формула $A(a) \rightarrow B(a)$; далее при помощи $B(a) \rightarrow (Ex)\,B(x)$ получается $A(a) \rightarrow (Ex)\,B(x)$ и по правилу γ2) $(Ex)\,A(x) \rightarrow (Ex)\,B(x)$; по теореме о дедукции заключаем, что формула (A*x*) выводима. *А. С. Есенин-Вольпин*

4708. Исправление опечаток (Errata), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 4, V

Приводятся опечатки в статье Лёба (РЖМат, 1954, 3589). В реферате, в правиле вывода *I7*, вместо

$$«(x)\,a\,\{\mathfrak{p} \cdot [x^\frown w]\,p \cdot [x^\frown L]\,p \cdot [x^\frown R]\,p\}»,$$

следует читать

$$«(x)\,a\,\{p \cdot [\overset{x}{x^\frown} w]\,p \cdot [\overset{x}{x^\frown} L]\,p \cdot [\overset{x}{x^\frown} R]\,p\}».$$

4709. Исправление опечаток (Errata), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 4, VI

К РЖМат, 1954, 2491.

4710. Список членов Ассоциации по символической логике. Куайн (List of officers and members of the Association for symbolic logic. Quine W. V.), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 4, 351—359 (англ.)

4711 К. Введение в символическую логику с особым учетом ее приложений. Карнап (Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Carnap R., 220 S., 5 Abb., Springer-Verlag, Wien, 1953), Preisverzeichnis, Springer-Verlag, Wien, 1954, Januar, p. 5 (библ.)

4712 РЕЦ. Методы логики. Куайн (Methods of logic. Quine Willard van Orman, XXI+264 pp., Routledge and Kegan Paul, London, 1952, 16 s.]**Рецензия: Ролинс** (Rawlins F. I. G.), Nature, 1953, **172**, № 4385, 884 (англ.)]

См. также: 4690, 4909, 4936

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

4713. Об одном аддитивном представлении целых чисел. Бухштаб А. А., Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, **71**, № 1, 45—62

Рассматривается задача о разложении достаточно больших четных чисел N на сумму двух слагаемых n' и n'' таких, что все простые делители n' больше, чем $N^{1/\alpha}$, а все простые делители n'' больше, чем $N^{1/\beta}$.

Пусть $T_{\alpha,\beta}(N)$ — число представлений N в виде $n'+n''$.

Доказывается, что при $\alpha \leqslant \beta$

$$T_{\alpha,\beta}(N) = C\frac{N}{\ln^2 N}\prod_{3\leqslant p\leqslant N^{1/\beta}}\frac{p-1}{p-2}\psi(\alpha,\beta) + O\left(\frac{N}{\ln^3 N}\right),$$

$$|\psi(\alpha,\beta)-\alpha\beta| < \exp\left[-\alpha\left(\ln\alpha+\ln\ln\alpha-1-\ln 2+\gamma\frac{\ln\ln\alpha}{\ln\alpha}\right)\right],$$

а C и γ — постоянные числа.

Эта асимптотическая оценка получается посредством применения улучшенного решета Бруна, разработанного автором в одной из его прежних работ (Бухштаб А. А., Матем. сб., 1951, **28** (**70**), № 1, 165—184). *И. Г. Мельников*

4714. О третьей теореме Харди — Литлвуда, относящейся к предположению Гольдбаха. Цулауф (Über den dritten Hardy — Littlewoodschen Satz zur Goldbachschen Vermutung. Zulauf Achim), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 2, 117—128 (нем.)

В 1922 г. Харди и Литлвуд показали, что в случае выполнения гипотезы (H) о существовании постоянной $\theta < \frac{3}{4}$ такой, что все функции Дирихле $L(s,\chi)\neq 0$ для $\mathrm{Re}\, s > \theta$, 1) все достаточно большие нечетные числа представимы в виде суммы трех простых, 2) почти все четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел.

В 1937 г. И. М. Виноградов распространил свой метод оценки тригонометрических сумм на суммы по простым числам, что дало ему, в частности, возможность доказать 1) без каких-либо гипотез.

Пользуясь методом И. М. Виноградова, Н. Г. Чудаков и Корпут в том же году доказали 2), а в 1938 г. Корпут показал возможность замены в утверждениях 1) и 2) сумм простых чисел линейными сочетаниями простых чисел, принадлежащих заданным арифметическим прогрессиям $Kt+l_i$.

В 1945 г. Ю. В. Линник показал, что 1) может быть также доказано методом Харди — Литлвуда, если вместо гипотезы (H) воспользоваться некоторыми теоремами о распределении нулей L-функций.

В работе методом Ю. В. Линника доказывается 2) и обобщение его на случай простых чисел, принадлежащих заданным арифметическим прогрессиям $Kt+l_i$ ($i=1,2$). *К. К. Марджанишвили*

4715. Дзета-функция алгебраической кривой рода 1. Дёйринг (Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. Deuring Max), Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. IIa, 1953, № 6, 85—94 (нем.)

Пусть k — конечное расширение поля рациональных чисел, C — алгебраическая кривая рода 1. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой дивизор поля k; кривая $\overline{C}$ — образ C при гомоморфизме $k\to k/\mathfrak{p}$, $K=(k/\mathfrak{p})(\overline{x},\overline{y})$ — поле алгебраических функций над кривой $\overline{C}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ — целый дивизор поля $\overline{K}$.

Полагаем:

$$\zeta(s,C,k,\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\neq 0} N\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{-s} \text{ для } \mathrm{Re}\, s > 1,$$

$$\zeta(s,C,k) = \prod_{\mathfrak{p}}\zeta(s,C,k,\mathfrak{p}),$$

где $\mathfrak{p}$ пробегает все простые дивизоры поля k.

В работе доказывается, что если кривая C имеет простой дивизор первой степени и если она имеет кольцо комплексных множителей, то функция $\zeta(s,C,k)$ выражается через L-функции Гекке поля k, т. е.

$$\zeta(s,C,k) = \zeta(s,k)\zeta(s-1,k)\times L\left(s-\frac{1}{2},k,\chi\right)^{-1}L\left(s-\frac{1}{2},k,\overline{\chi}\right)^{-1},$$

где χ — характер Гекке.

Следовательно, $\zeta(s,C,k)$ — мероморфная функция во всей плоскости и удовлетворяет функциональному уравнению типа Римана. Этот результат является ответом на задачу, поставленную в работе Вейля (Weil A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, № 3, 487—495). *Н. Г. Чудаков*

4716. О функциональном уравнении для обобщенной L-функции. Тамагава (On the functional equation of the generalized L-function. Tamagawa Tsuneo), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I., 1953, **6**, 421—428 (англ.)

В недавней работе Вейль (Weil A., J. Math. Soc. Japan, 1951, **3**, 1—35) ввел обобщение неабелевых L-рядов Артина. Настоящая статья содержит вывод функционального уравнения для этих новых L-функций методом, аналогичным методу Артина.

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 951.

4717. Новое доказательство предельной формулы Кронекера. Кёхер (Ein neuer Beweis der Kroneckerschen Grenzformel. Koecher Max), Arch. Math., 1953, **4**, 316—321 (нем.)

Предельная формула Кронекера утверждает, что если $f(\tau;u,v)$ — положительно определенная двойничная квадратичная форма с корнем

$$\tau = x+iy : f(\tau;u,v) = u^2\tau\overline{\tau} + uv(\tau+\overline{\tau}) + v^2$$

и $\zeta(\tau;s)$ — соответствующая ей ζ-функция

$$\zeta(\tau; s) = \sum_{m, n}{}' f(\tau; m, n)^{-s},$$

то

$$\left(\frac{y}{\pi}\zeta(\tau; s) - \frac{1}{s-1}\right)\Big|_{s=1} =$$

$$= -\frac{1}{12}\log(\Delta(\tau)\Delta(-\bar{\tau})) - 2\log y + 2(C - \log 2), \quad (1)$$

где

$$\Delta(\tau) = \exp(2\pi i\tau)\prod_{n=1}^{\infty}[1 - \exp(2\pi i n\tau)]^{24}$$

есть модулярная форма веса 12, называемая в теории эллиптических функций дискриминантом.

Формула (1) является основой вывода выражений для числа классов абелевых расширений квадратичного мнимого поля. Имевшиеся раньше доказательства формулы (1), принадлежащие Кронекеру, Веберу и Эпштейну, основывались на записи ряда для $\zeta(\tau; s)$ в виде двойного интеграла и на довольно сложных преобразованиях этого интеграла.

Реферируемая работа содержит новый весьма простой вывод формулы (1). Доказывается, что функция $\Delta(\tau)$ однозначно, с точностью до множителя, определяется некоторыми своими простыми свойствами (тем, что она модулярная форма, своим поведением на бесконечности и т. д.).

Если ввести обозначение

$$\eta(\tau; s) = \frac{y}{\pi}\zeta(\tau; s) - \frac{1}{s-1}$$

и положить $\eta(\tau; 1) = -2\log y - \log\beta(\tau)$, то, как легко показать, $\beta(\tau)$ может быть представлено в виде $\gamma(\tau)\gamma(-\bar{\tau})$. Дальше проверяется, что $\gamma^{12}(\tau)$ обладает всеми свойствами, которыми $\Delta(\tau)$ характеризуется с точностью до постоянного множителя. Это доказывает формулу (1) с точностью до постоянного слагаемого, которое определяется подстановкой $\tau = i$. *И. Р. Шафаревич*

4718. Формула взаимности для квадратичных разбиений с весом. Карлиц (A reciprocity formula for weighted quadratic partitions. Carlitz L.), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 286—288 (англ.)

Пусть p — нечетное простое число. Для α, принадлежащего конечному полю Галуа $GF(p^n)$, положим

$$e(\alpha) = e^{2\pi i t(\alpha)/p},$$

где

$$t(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \ldots + \alpha^{p^{n-1}}.$$

Рассматривается сумма с весом

$$S(\alpha, \lambda, Q) = \sum_{Q(\xi)=\alpha} e(2\lambda_1\xi_1 + \ldots + 2\lambda_r\xi_r), \quad (1)$$

где

$$\alpha, \lambda_j \in GF(p^n),$$

$$Q(u) = \sum_{k,j=1}^{r}\alpha_{kj}u_k u_j$$

$$(\alpha_{kj} \in GF(p^n),\ \delta = |\alpha_{kj}| \neq 0);$$

в (1) суммируют по всем $\xi_i \in GF(p^n)$, удовлетворяющим условию $Q(\xi) = \alpha$.

В статье автора (РЖМат, 1954, 2859) вычисляется сумма $S(\alpha, \lambda, Q)$, а затем сразу показывается, что если

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{r}\alpha_{kj}\lambda_j', \ (k = 1,2, \ldots, r),$$

то имеет место формула взаимности

$$S(\alpha, \lambda, Q) = S(\alpha, \lambda', Q'), \quad (2)$$

где $Q'(u)$ — квадратичная форма, обратная к $Q(u)$.

В реферируемой статье дается непосредственное доказательство формулы (2).

Далее, если $f(u) = f(u_1, \ldots, u_r)$ и $g(u) = g(u_1, \ldots, u_r)$ обозначают произвольные полиномы с коэффициентами из поля $GF(p^n)$, то для сумм

$$S(\alpha, f, Q) = \sum_{Q(\xi)=\alpha} e(f(\xi)),$$

$$S(\alpha, f, g) = \sum_{g(\xi)=\alpha} e(f(\xi))$$

также имеют место аналогичные формулы взаимности.

Автор также рассматривает формулу, аналогичную формуле (2), когда все коэффициенты — целые рациональные числа. *Г. А. Ломадзе*

4719. О равномерном распределении по модулю, являющемуся некоторым разбиением. Ле-Век (On uniform distribution modulo a subdivision. Leveque W. J.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 757—771 (англ.)

Рассматривается следующее обобщение понятия равномерного распределения числовых последовательностей по модулю 1.

Пусть Δ — некоторое разбиение интервала $(0, \infty)$:

$$\Delta = (z_0, z_1, \ldots),$$

где $0 = z_0 < z_1 < \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} z_n \to \infty$.

Для $x \in [z_{n-1}, z_n)$ положим:

$$[x]_\Delta = z_{n-1},\ \delta(x) = z_n - z_{n-1},$$

$$\langle x\rangle_\Delta = \frac{x - [x]_\Delta}{\delta(x)}.$$

Пусть $\{x_k\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел. Для всякого $\alpha \in [0,1]$ обозначим через $N(\alpha, x)$ число членов последовательности $\{x_k\}$, удовлетворяющих условиям:

$$x_k \leqslant x,\ \langle x_k\rangle_\Delta < \alpha;\ N(x) = N(1, x).$$

Автор называет последовательность $\{x_k\}$ равномерно распределенной по модулю Δ (сокращенно: р. р. mod Δ), если $N(\alpha, x_k) / N(x_k) \to \alpha$ при $k \to \infty$ для всякого $\alpha \in [0,1]$.

Если $\Delta = \Delta_0$, где $\Delta_0 = \{0,1,2, \ldots\}$, то понятие р. р. mod Δ совпадает с понятием р. р. mod 1. Вообще р. р. последовательности $\{x_k\}$ mod Δ эквивалентно р. р. mod 1 некоторой другой последо-

вательности $\{\langle x\rangle_\Delta\}$. Однако ряд теорем о р. р. mod 1 не применим к последовательностям $\{\langle x_k\rangle_\Delta\}$ в общем случае.

Доказываются теоремы:

1. Для того чтобы последовательность $\{x_k\}$ была р. р. mod Δ, необходимо, чтобы $N(z_{n+1}) \sim N(z_n)$.

2. Пусть $N(z_n) - N(z_{n-1}) \to \infty$. Тогда последовательность $\{x_k\}$ р. р. mod Δ, если

a) $N(z_{n-1}) \sim N(z_n)$;

b) за исключением, быть может, последовательности интервалов $[z_{n_t-1}, z_{n_t}]$ таких, что

$$\sum_{t=1}^{m} (N(z_{n_t}) - N(z_{n_t-1})) = o(N(z_{n_m})),$$

соотношение $\max(x_k - x_{k-1}) \sim \min(x_k - x_{k-1})$ имеет место при $n \to \infty$, где максимум и минимум берутся независимо для данного $n \neq n_1, n_2, \ldots$ по всем k, для которых по меньшей мере одно из чисел x_{k-1} и x_k лежит в $]z_{n-1}, z_n]$.

3. Последовательность $\{x_k\}$ р. р. mod Δ, если

a) $z_n - z_{n-1} \geqslant z_{n-1} - z_{n-2}$ $(n = 2,3, \ldots)$;

b) $x_k - x_{k-1}$ монотонно убывает к 0 при $k \to \infty$;

c) $N(z_{n-1}) \sim N(z_n)$.

4. Если $\delta(x)$ стремится к 0, монотонно не возрастая, $\delta(x) = O(x^{-1})$, то $\{k\theta\}$ р. р. mod Δ для почти всех $\theta > 0$.

5. Предположим, что $\{x_k\}$ р. р. mod Δ и $f(x)$ — вещественная функция, обладающая свойствами:

a) $f(x)$ дифференцируема всюду за исключением, быть может, точек $z_1, z_2, \ldots$;

b) $f(x) \to \infty$, монотонно возрастая при $x \to \infty$;

c) $\inf\limits_{x \in (z_{n-1}, z_n)} f'(x) \sim \sup\limits_{x \in (z_{n-1}, z_n)} f'(x)$ $(n \to \infty)$.

Тогда последовательность $\{f(x_k)\}$ р. р. mod Δ^*, где $\Delta^* = \{f(z_n)\}$.

6. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и еще следующим:

a) $f'(x)$ монотонна;

b) при $n \to \infty$ $f^{-1}(z_n) - f^{-1}(z_{n-1}) \to 0$, монотонно не возрастая,

$$f^{-1}(z_n) - f^{-1}(z_{n-1}) = O(1 / f'(f^{-1}(z_n))),$$

$$f'(f^{-1}(z_n)) \sim f'(f^{-1}(z_{n-1})),$$

где f^{-1} — обратная к f функция.

Тогда для почти всех $\theta > 0$ последовательность $\{f(k\theta)\}$ р. р. mod Δ.

Из последней теоремы следует теорема:

Если $g(x)$ — возрастающая функция с монотонной логарифмической производной и $g'(x) / g(x) = O(x^{-1/2})$ $(x \to \infty)$, то последовательность $\{\alpha^k\}$ р. р. mod Δ_1 для почти всех $\alpha > 1$, где $\Delta_1 = \{g(n)\}$. *И. П. Кубилюс*

4720. О последовательных производных от одного замкнутого множества целых алгебраических чисел. Дюфренуа, Пизо (Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques. Dufresnoy J., Pisot Ch.), Bull. Sci.math., 1953, сер. 2, **127**, juillet — août, 129—136 (франц.)

Предмет рассмотрения авторов (РЖМат, 1953, 53; 1954, 3956) — множество S целых алгебраических чисел θ, все сопряженные которых по модулю меньше, чем 1. Как показал Салем (Salem, Duke Math. J., 1944, **1**, 103—108) множество S (действительное) замкнутое, причем все производные множества конечных порядков $S^{(n)}$ не пустые. В данной статье устанавливается, что все точки $S^{(n)}$ лежат вне круга $|z| \leqslant n^{1/4}$ $(n \geqslant 1)$. Таким образом, не существует точек, принадлежащих всем производным $S^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ одновременно (производные трансфинитных порядков — пустые). *В. Л. Гончаров*

4721. Гипотезы Минковского о критических решетках для области $|x|^p + |y|^p \leqslant 1$. (I). Уотсон (Minkowski's conjectures on the critical lattices of the region $|x|^p + |y|^p \leqslant 1$. (I). Watson G. L.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 3, № 111, 305—309 (англ.)

Пусть $\Delta(P)$ — площадь параллелограмма с одной вершиной в начале координат и остальными тремя на кривой $|x|^p + |y|^p = 1$, $p \geqslant 1$, причем P — одна из вершин: P_0 и P_1 обозначают точки $(1, 0)$ и $(2^{-1/p}, 2^{-1/p})$.

Автор замечает, что в работе Дейвиса (Davis C. S., J. London Math. Soc., 1948, **23**, 172—175) имеются ошибки и с целью их исправления доказывает теорему.

Теорема. Существует константа p_0, ограниченная неравенствами $2{,}57 < p_0 < 2{,}58$, такая, что $\Delta(P_0) = \Delta(P_1)$ для $p = p_0$ и $\Delta(P_1) < \Delta(P_0)$ для $1 < p < 2$ и $p > p_0$, $\Delta(P_0) < \Delta(P_1)$ для $2 < p < p_0$. *Д. С. Горшков*

4722. Гипотезы Минковского о критических решетках для области $|x|^p + |y|^p \leqslant 1$. (II). Уотсон (Minkowski's conjectures on the critical lattices of the region $|x|^p + |y|^p \leqslant 1$. (II). Watson G. L.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 112, 402—410 (англ.)

Изучается вопрос о критических решетках выпуклой области

$$|x|^p + |y|^p \leqslant 1, \qquad (1)$$

где $p \geqslant 1$ — произвольное вещественное число. Известно (Minkowski H., Diophantische Approximationen, Berlin, Teubner, 1907, 51—58), что критический детерминант области (1) (т. е. наименьшая из площадей основных параллелограммов критических решеток) есть $\min\limits_P \Delta(P)$, где $\Delta(P)$ — площадь параллелограмма, который имеет одну вершину в начале 0, а остальные три — на границе области (1). Обозначим $\Delta(P_0) = \Delta_0$, где $P_0 = (1, 0)$, и $\Delta(P_1) = \Delta_1$, где $P_1 = (2^{-1/p}, 2^{-1/p})$. Уточняя гипотезу Минковского, Дейвис (Davis C. S., J. London Math. Soc., 1948, **23**, 172—175) предположил, что

$$\min_P \Delta(P) = \min(\Delta_0, \Delta_1). \qquad (2)$$

Это предположение доказано для $p=1, 2$ (Minkowski H., цит. соч., $p=4$ (Mordell L. J., J. London Math. Soc., 1941, **16**, 152—156) и для достаточно больших p (Cohn H., Ann. Math., 1950, **51**, 734—738). Для других значений p справедливость соотношения (2) неизвестна.

В реферируемой статье доказывается, что $\min(\Delta_0, \Delta_1)$ есть всегда локальный минимум $\Delta(P)$. Автор использует критерии, данные без доказательства Коном (Cohn H., предыдущая ссылка). Эти критерии обосновываются, а в одном случае и исправляются. *А. В. Малышев*

4723. Наименьшие определители целочисленных квадратичных форм. Оппенгейм (Least determinants of integral quadratic forms. Oppenheim A.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 3, 391—393 (англ.)

Пусть $\delta(s, s)$ — наименьший определитель положительных целочисленных квадратичных форм $f=\Sigma a_{ij}x_ix_j$ ($a_{ij}=a_{ji}$, $i, j=1, 2, \ldots s$; a_{ii} и $2a_{ij}$ — целые числа) от s переменных с сигнатурой s.

О' Коннор и Полл (O'Connor R. E., Pall G., Duke Math. J., 1944, **11**, № 2, 319—331) показали, что $\delta(s, s)=1/2^s$ ($s\equiv 0$), $2/2^s$ ($s\equiv\pm 1$), $3/2^s$ ($s\equiv\pm 2$), $4/2^s$ ($s\equiv 3, 4 \pmod 8$), и нашли формы f_s с такими определителями.

В работе автора найдены определители с наименьшей абсолютной величиной неопределенных целочисленных квадратичных форм и указаны формы с такими определителями.

Пусть g_m — целочисленная квадратичная форма от m переменных ранга m и сигнатуры $\pm s$, где $s>0$, так что $m=s+2r$, r — целое $\geqslant 0$.

Пусть $\delta(m, s)$ — наименьшая из абсолютных величин определителей всех форм g_m.

Доказана следующая общая теорема:

$$\delta(m, s)=1/2^m\ (s\equiv 0),\ 2/2^m\ (s\equiv\pm 1),$$
$$3/2^m\ (s\equiv\pm 2),\ 4/2^m\ (s\equiv\pm 3, 4 \pmod 8),$$

причем форма с таким определителем есть $g_m=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2r-1}x_{2r}\pm f_s(y_1, \ldots, y_s)$, где $_s=0$, если $s=0$, и f_s при $s\geqslant 1$ есть форма, которую нашли О'Коннор и Полл:

$$f_1=y_1^2,\ f_2=f_1^2+y_1y_2+y_2^2,\ f_3=f_2+y_2y_3+y_3^2,$$
$$f_4=f_3+2y_3y_4+2y_4^2,$$
$$f_5=\sum_{i=1}^{3}(y_i^2+y_iy_{i+1})+y_4^2+2y_4y_5+2y_5^2,$$
$$f_j=\sum_{i=1}^{j-2}(y_i^2+y_iy_{i+1})+y_{i-1}^2+3y_{i-1}y_i+$$
$$+4y_i^2\ (j=6, 7, 8),$$

и если $s=8t+p$, $0\leqslant p<8$, то

$$f_s=f_8(y_1, \ldots, y_8)+f_8(y_9, \ldots, y_{16})+\cdots+$$
$$+f_8(y_{8t-7}, \ldots, y_{8t})+f_p(y_{8t+1}, \ldots, y_{8t+p}).$$

Замечена опечатка: на стр. 391 в последней строке напечатано $\sum_{i=1}^{j=2}$, а должно быть $\sum_{i=1}^{j-2}$.

И. Г. Мельников

4724. Систематические исследования о последней теореме Ферма. Натуччи. (Ricerche sistematiche sull'ultimo teorema di Fermat. Natucci Alpinolo), Giorn. mat. Battaglini, 1952—1953, **81**, № 2, 171—179 (итал.)

Перечисляются некоторые работы по проблеме Ферма и делается попытка связать проблему Ферма с элементарной задачей на нахождение максимума или минимума функции $f=z^n-x^n-y^n$. Рассматриваются самые простые случаи возможных зависимостей между x, y, z. *П. Н. Реморов*

4725. Элементы арифметики в классах вычетов по модулю n. Фадини (Elementi di aritmetica nelle classi modulo n. Fadini Angelo), Giorn. mat. Battaglini, 1952—1953, **81**, № 2, 153—170 (итал.)

Дается интерпретация классов вычетов по модулю n посредством некоторой алгебры над полем классов вычетов по модулю p, если n — степень простого числа p, или прямой суммы r таких алгебр, если каноническое разложение числа n содержит r различных простых чисел.

Рассматриваются идеалы кольца классов вычетов по модулю n, а также вопросы делимости в этом кольце.

Статья не содержит новых результатов. *И. П. Кубилюс*

4726. Об одной формуле Рамануджана. Перрон (Über eine Formel von Ramanujan. Perron Oskar), S.-B., Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 197—213 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Упомянутая в заглавии формула дает сумму известной непрерывной дроби, именно

$$x+\frac{1^2-n^2}{x}+\frac{2^2-m^2}{x}+\frac{3^2-n^2}{x}+\frac{4^2-m^2}{x}+\cdots=$$
$$=m\frac{1+P(x)}{1-P(x)},$$

где

$$P(x)=\prod_{\delta^2=\varepsilon^2=1}\left\{\frac{\Gamma\{(1+x+\delta m+\delta\varepsilon n)/4\}}{\Gamma\{(3+x+\delta m+\delta\varepsilon n)/4\}}\right\}^{\delta}.$$

Формулу открыл Рамануджан, но не дал доказательства. Доказательство дал Прис в 1930 г. (Preece C. T., J. London Math. Soc., 1931, 6, 22—32), пользуясь асимптотическим разложением. Автор критикует его доказательство и приводит элементарное доказательство, основанное на трансформации Бауера и Муйра. Это позволяет доказать формулу для всех комплексных m, n и $R(x)>0$. Частный случай $m=n$ открыл Стилтьес в 1891 г. *D. N. Lehmer*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 950.

4727. Новое доказательство теоремы Мёснера. Паше (Ein neuer Beweis des Moessnerschen

Satzes. Paasche Ivan), S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 1—5 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Замечание к одной теореме Мёснера. Салие Bemerkung zu einem Satz von A. Moessner. Salié Hans), S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 7—11 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Теорема, о которой идет речь, была сформулирована Мёснером (Moesner, S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1951, 29) и доказана Перроном (Perron, S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1951, 31—34). Первая из реферируемых заметок содержит доказательство, использующее производящие функции.

Во второй заметке теорема обобщается так, что в качестве исходной берется произвольная последовательность чисел, и соответствующий результат затем доказывается по индукции.

H. W. Brinkmann

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 9, 846.

4728. Две рекуррентные формулы для сумм s_{2k}. Янкович (Two recurrence formulae for the sums s_{2k}. Janković Zlatko), Hrvatsko Prirodoslovno Društvo. Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, сер. 2, 8, 27—29 (англ.; резюме сербохорв.)

Рассматриваются суммы $s_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 10, 974.

4729. Вычисление логарифма простого числа. Бешлин (Die Berechnung des Logarithmus einer Primzahl. Baeschlin C. F.), Schweiz. Z. Vermessung, 1953, 51, № 12, 319—322 (нем.)

Решается задача о вычислении логарифма простого нечетного числа p при условии, что известны логарифмы чисел $p-1$ и $p+1$.

Переход от формулы

$$\ln p = \frac{1}{2}[\ln(p+1) + \ln(p-1)] + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}\left(\frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^4 + \cdots + \frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{p}\right)^{2\nu} + \cdots\right\}$$

к формуле

$$\ln p = \frac{1}{2}[\ln(p+1) + \ln(p-1)] + \frac{1}{4}[\ln(p+1) - \ln(p-1)] \times \left\{\frac{B_2}{p} + \frac{B_4}{p^3} + \cdots + \frac{B_{2\nu}}{p^{2\nu-1}} + \cdots\right\}$$

значительно усиливает сходимость первоначального ряда при больших p.

Неопределенные коэффициенты B_2, B_4,... находятся посредством сравнения этих формул.

Б. М. Бредихин

4730. Вычисление логарифма простого числа (окончание). Бешлин (Die Berechnung des Logarithmus einer Primzahl (Schluss). Baeschlin C. F.), Schweiz. Z. Vermessung, 1954, 52, № 1, 8—11 (нем.)

Полученная в первой части статьи формула преобразуется к виду, удобному для вычислений:

$$\log p = S + \Delta_0 + \Delta_1 + \frac{28}{10}\Delta_2 + \frac{724}{70}\Delta_3 + \frac{30448}{700}\Delta_4 + \frac{1\,518\,656}{7700}\Delta_5 + R_5.$$

Здесь используются обозначения Дюарта (Duarte F. J., Nouvelles tables logarithmiques à 36 décimales, Paris, 1933, S. VIII):

$$S = \frac{1}{2}[\log(p+1) + \log(p-1)],$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{4p}[\log(p+1) - \log(p-1)],$$

$$\Delta_k = \frac{\Delta_{k-1}}{6p^2} \qquad (k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$$R_5 < \frac{1}{4}10^{-43} \text{ при } p > 1000.$$

В качестве примера рассматривается вычисление логарифма простого числа $p = 10\,009$ с 16 десятичными знаками; даются указания для его вычисления с 36 десятичными знаками.

Б. М. Бредихин

4731. Прием для получения нормальных многостепенных систем. Глодан (Un procédé de formation de systèmes multigrades normaux. Gloden A.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 11, 474—480 (франц.)

Нормальной многостепенной системой порядка n назовем систему неопределенных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^k = \sum_{i=0}^{n} B_i^k,$$

где k принимает все значения от 1 до n.

Показывается как в некоторых случаях можно из решения нормальной многостепенной системы порядка n получить решение такой же системы порядка $n+1$.

Разобрано несколько примеров на получение решений систем 4-го порядка. *В. Д. Подсыпанин*

4732. Об уравнении $x^4 + mx^2y^2 + ny^4 = z^2$. Кеерудакес (On the equation $x^4+mx^2y^2+ny^4=z^2$. Xeroudakes Georgios F.), Bull. Soc. Math. Grèce, 1953, 27, 85—91 (греч., резюме англ.)

Пусть сравнение $z^2 \equiv p^2(p^2 + mq^2) \pmod{q^4}$ при данных целых числах p, q, m, при условии $q \neq 1$, $(p, q) = 1$ имеет решение z_0. Автор доказывает, что $x = p$, $y = q$ является решением уравнения, указанного в заглавии, тогда и лишь тогда, когда m имеет вид

$$n = q^4X^2 + 2z_0X + [z_0^2 - p^2(p^2 + mq^2)/q^4],$$

где X — целое число.

T. Apostol

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 10, 950.

4733. Об одном арифметическом уравнении. Врынчану (Asupra unei ecuaţii aritmetice. Vrănceanu. G.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 1—2, 5—8 (рум.; резюме русск., франц.)

Рассматривается уравнение в целых числах

$$N^2 - N = A10^n, \qquad (1)$$

где n есть число цифр числа N.

Автор дает новое доказательство результатов, полученных относительно решений уравнения (1) Д. Помпею, и показывает, что с небольшими изменениями эти результаты прилагаются и к несколько более общему уравнению

$$N^2 - kN = A10^n,$$

где k — положительное или отрицательное нечетное число, не делящееся на 5; изучен также случай четного k, причем показано, что при $n > 1$ и k, не делящемся на 10, последнее уравнение не имеет решений, аналогичных решениям уравнения Помпею. *А. И. Попов*

4734. Теорема из теории чисел. Коразан (A theorem for the theory of numbers. Corazão Alberto), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 640—642 (англ.)

Приводятся некоторые тривиальные следствия из тождества $pq = p + q + [-1 + (p-1)(q-1)]$. *В. Б. Демьянов*

4735. Некоторые исследования и результаты по теории чисел. Мёснер (Einige zahlentheoretische Untersuchungen und Resultate. Moessner Alfred), Glasnik mat., fiz. i. astron., 1953, сер. 2, **8**, № 2, 129—132 (нем.; резюме хорв.)

Приводится несколько элементарных тождеств. *В. Д. Подсыпанин*

4736. Заметка о магических кругах. Рейнор (Note on magic circles. Raynor G. E.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 640 (англ.)

Проводится элементарное обоснование отрицательного ответа на вопрос: конечно ли число «совершенных магических кругов»? (РЖМат, 1953, 1549). *Б. А. Кордемский*

4737. Добавления и исправления (Addendum and correction), J. Franklin Inst., 1953, **256**, № 3, 265 (англ.)

К реф. 1983.

См. также: 4910

АЛГЕБРА

4738. Результаты советских математиков в области абстрактной алгебры. Фукс, Селе (Szovjet eredmények az abstrakt algebra területén. Fuchs László, Szele Tibor), Mat. lapok, 1953, **4**, № 2—3, 92—107 (венг.; резюме русск., англ.).

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4739. О разложении многочленов с помощью конечного числа шагов. Круль (Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. Krull Wolfgang), Math., Z., 1953, **59**, № 1, 57—60 (нем.)

Вводятся понятия конечного вполне определенного поля и конечной разложимости многочлена $p(x_1,\ldots,x_\mu)$ над произвольным полем K в узком и широком смысле. Известно, что всякий многочлен $p(x_1,\ldots,x_\mu)$ конечно разложим (в узком и широком смысле) над произвольным вполне определенным полем. В статье дается пример конечной разложимости многочлена (в широком смысле) над не вполне определенным полем нулевой характеристики. Сама же конструкция примера приводит к следующему вопросу: существуют ли, кроме последовательности мнимо квадратичных числовых полей, другие, существенно отличные последовательности $K_1, K_2,\ldots$ конечных алгебраических числовых полей, для которых также верна теорема о том, что всякий целочисленный неприводимый (над полем рациональных чисел) многочлен $p(x)$ остается неприводимым и над K_ν, где $\nu > \nu^*$ и ν^* зависит от $p(x)$. *Л. Я. Окунев*

4740. О непрерывности действительных корней алгебраического уравнения. Хенриксен, Исбелл (On the continuity of the real roots of an algebraic equation. Henriksen Melvin, Isbell J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 431—434 (англ.)

Пусть $P(w)$ — многочлен от w, коэффициенты которого являются непрерывными комплексными функциями точки x хаусдорфова пространства X. Доказывается, что если уравнение $P(w) = 0$ имеет действительный корень при всех $x \in X$, то в X найдется открытое множество U, в котором один из действительных корней этого уравнения будет непрерывной функцией x. Если число действительных корней уравнения $P(w) = 0$ одно и то же для всех $x \in X$, то в качестве U можно взять само X.

При помощи этого предложения доказывается, что поле вычетов кольца действительных непрерывных функций, определенных в нормальном пространстве, по любому его максимальному идеалу является действительно замкнутым.

Этот результат для случая любых хаусдорфовых пространств сформулирован у Хьюитта (Hewitt, Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 45—99), но оказался ошибочным (Math. Rev., 1949, **10**, 126). *А. И. Узков*

4741. Условия существования области устойчивости для одноконтурной системы автоматического регулирования. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Прикл. математика и механика, 1954, **18**, № 1, 103—122

Рассматривается уравнение

$$d_1^{(1)}(p)\ldots d_m^{(1)}(p) + d_1^{(2)}(p)\ldots d_m^{(2)}(p) = 0, \quad (1)$$

где $d_\nu^i(p)$ — многочлены степени не выше второй. Предполагается, что для каждого многочлена $d_\nu^i(p)$ известно, какие из его коэффициентов отличны от нуля, причем для каждого отличного от нуля коэффициента предполагается известным знак. Абсолютные величины отличных от нуля коэффициентов рассматриваются как параметры, принимающие произвольные положительные значения. В работе для широкого класса случаев указаны условия (как правило, необходимые и достаточные), при выполнении которых в уравнении (1) можно выбрать параметры так, чтобы все корни уравнения имели отрицательные действительные части.

Рассматриваемое уравнение является характеристическим уравнением одноконтурной системы автоматического регулирования, и теоремы авторов отвечают на вопрос о структурной устойчивости этой системы во многих интересных для техники случаях.

В конце работы формулируется задача исследования уравнений более общего типа, решение которой позволит ответить на вопрос о структурной устойчивости любых линейных систем автоматического регулирования. *М. М. Постников*

4742. Об одном предложении теории определителей и о его следствиях. Круковский (Круковский-Синевич) Б. В., Тр. Киевского автомоб. ин-та, 1953, **1**, 150—153

Доказана теорема:

Если j соответствующих элементов в каждой из $n-j+1$ строк определителя n-го порядка имеют общий множитель k, то в каждое слагаемое определителя входит минимум первая степень k.

Отметим неточность формулировки автора: «k можно вынести за знак определителя»,— а также то, что доказательство следует непосредственно, если раскрыть определитель по формуле Лапласа. Из теоремы получены два следствия и указано обобщение для кубического определителя.

Д. М. Котелянский

4743. Заметка о теореме Сильвестра — Франка. Фландерс (A note on the Sylvester — Franke theorem. Flanders Harley), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 8, 543—545 (англ.)

Доказательство теоремы об определителе матрицы преобразования мультивектора, по существу не отличающееся от известных доказательств (например, Широков П. А., Тензорное исчисление ч. 1, ГТТИ, 1934, 330). *Г. Е. Шилов*

4744. К практике биортонормирования собственных и главных векторов. Унгер (Zur Praxis der Biorthonormierung von Eigen- und Hauptvektoren. Unger Heinz), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 10/11, 319—331 (нем.)

Если ранг матрицы Грама $\|(x_i, y_j)\|$ двух систем векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ равен k, системы могут быть биортогонализированы, т. е. можно построить k векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$ в линейной оболочке $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и k векторов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ в линейной оболочке $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ так, что $\|(e_i, f_j)\|$ будет единичной матрицей. Если ранг τ матрицы $\|(x_i, y_j)\|$ меньше k, то применение этого процесса приведет к системам $e_1, e_2, \ldots, e_k$ и $f_1, f_2, \ldots, f_k$, для которых $(e_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$ и при $i = j > \tau$ и $(e_i, f_i) = 1$ при $i \leqslant \tau$.

Указывается численный процесс для биортогонализации систем векторов, используемых для построения жордановых матриц данного линейного оператора A и ему сопряженного A^*.

Г. Е. Шилов

4745. О тезисах двух заметок Т. Важевского относительно краковианов и матриц. Банахевич (Sur les thèses de deux notes de T. Wazewski relatives aux cracoviens et aux matrices. Banachiewicz Tadeusz), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1953, **24**, № 2, 153—156 (франц.)

Статья является полемическим ответом на две заметки Т. Важевского: Remarques relatives aux certains théorèmes de M. Banachiewicz. I; Théorèmes de M. Banachiewicz relatifs à la mèthode des moindres carrés. II (Roczn. Polskiego towarz. math., 1950, **22**, 286—288). *T. Iwiński*

ГРУППЫ

4746. Полугруппы и аксиоматика группы. Круазо (Demi-groupes et axiomatique des groupes. Croisot Robert), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 15, 778—780 (франц.)

Рассматриваются требования, при выполнении которых ассоциативная система D (т. е. множество с бинарной операцией, для которой выполняются аксиомы существования и единственности произведения двух элементов и аксиома ассоциативности) является группой. В частности, показывается, что D является группой, если D содержит элемент d, удовлетворяющий требованиям:

1) для всякого элемента $x \in D$ существует единственный элемент $x' \in D$ такой, что $x'x = d$;

2) имеется элемент $c \in D$, для которого существует единственный элемент $c'' \in D$ такой, что $cc'' = d$. *А. П. Дицман*

4747. О конечных группах, являющихся суммой пяти подгрупп. Греко (Su alcuni gruppi finiti che sono somma di cinque sottogruppi. Greco Donato), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 2, 313—333 (итал.)

Исследуется вопрос о возможности записи конечной группы G в виде суммы ее подгрупп G_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, причем предполагается, что никакие четыре из G_i не исчерпывают всей группы G. В случае, когда все пересечения $G_i \cap G_k (i \neq k)$ равны друг другу, необходимое и достаточное условие равенства конечной группы G сумме всех G_i состоит в наличии у G такого нормального делителя N, что фактор-группа G/N является группой одного из следующих видов.

1. Группа порядка 2^3, являющаяся абелевой группой типа (1, 1, 1) или группой диэдра.

2. Группа, изоморфная знакопеременной группе четырех символов.

3. Абелева группа порядка 2^4 и типа (1,1,1,1).

4. Группа порядка $2^4 3$, определяемая соотно-

шениями

$$a_k^2 = b^3 = 1 \quad a_h a_k = a_k a_h \,(h, k = 1, 2, 3, 4)$$
$$a_1 b = b a_2 \quad a_2 b = b a_1 a_2$$
$$a_3 b = b a_4 \quad a_4 b = b a_3 a_4$$

Любая из этих групп является суммой пяти своих подгрупп. Этим подгруппам фактор-группы G / N соответствуют (при естественном гомоморфизме между G и G / N) пять подгрупп G_i группы G, суммой которых является группа G.

В. К. Туркин

4748. Формула для степени косого представления симметрической группы. Фейт (The degree formula for skew-representations of the symmetric group. Feit W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 740—744 (англ.)

Дана формула для степени косого представления симметрической группы, т. е. представления, соответствующего косой диаграмме (понятия косой диаграммы и косого представления см. Robinson G. de B., Amer. J. Math., 1948, **70**, 279—294). Пусть P — диаграмма типа $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$, т. е. совокупность k рядов, состоящих соответственно из a_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ точек, причем $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_k > 0$. Пусть аналогично Q — диаграмма типа $[b_1, b_2, \ldots, b_k]$, причем $b_i \leqslant a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Степень косого представления, соответствующего косой диаграмме $P - Q$, равна

$$n! \det (z_{ij}),$$

где

$$n = \sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i),$$
$$z_{ij} = \frac{1}{(a_j - b_i - j + i)!}.$$

Эта формула используется затем для вычисления характеров неприводимых представлений симметрической группы.

В. К. Туркин

4749. Изоморфное отображение топологических групп в прямые произведения групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности. Кац Г. И., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6, 107—113.

Топологическая группа называется группой с квазиинвариантным базисом, если для любой окрестности V единицы группы можно найти не более чем счетную систему окрестностей единицы $V_n \subseteq V$ такую, что для любого элемента g группы найдется номер i, для которого $gV_i g^{-1} \subseteq V$. Группы с первой аксиомой счетности, а также связные локально бикомпактные группы являются группами с квазиинвариантным базисом. Прямое произведение групп с квазиинвариантным базисом есть также группа с квазиинвариантным базисом. Чтобы топологическая группа могла быть топологически изоморфно отображена в прямое произведение некоторой системы групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, необходимо и достаточно, чтобы она обладала квазиинвариантным базисом.

М. И. Граев

4750. Об алгебраической структуре разрывных групп. Герстенхейбер (On the algebraic structure of discontinuous groups. Gerstenhaber Murray), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 745—750 (англ.)

Изучается алгебраическая структура разрывных (дискретных) групп гомеоморфизмов топологического пространства. Пусть S — связное, локально связное хаусдорфово пространство, G — группа гомеоморфизмов, действующих на S, и D — связное подпространство такое, что 1) S является дизъюнктным объединением множеств gD $(g \in G)$; 2) число элементов совокупности $F = \{g \in G \mid g\overline{D} \cap \overline{D} \neq 0\}$ конечно и FD содержит некоторую окрестность D. Тогда S называется допустимым пространством, G — группой 1-го рода, действующей на S, и D — собственной фундаментальной областью для G. Элементы F порождают G (Siegel C. L., Ann. Math., 1943, 44, 674—689) и называются локальными образующими G относительно D.

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — отличные от единицы элементы F, $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ — произвольные переменные, $\tilde{H}$ — свободная группа с образующими $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$. Элементы ядра гомоморфизма $(\tilde{f}_i \to f_i)$ группы $\tilde{H}$ на G дают соотношения в G. С другой стороны, пусть H — группа с образующими $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ и всеми соотношениями вида $\tilde{f}_i = \tilde{f}_j \tilde{f}_k$, где $f_i = f_j f_k$ в G. Элементы ядра естественного гомоморфного отображения $\tilde{f}_i \to f_i$ группы H на G называются локальными соотношениями в G, группа H называется локальной универсальной накрывающей группой для G, а упомянутый гомоморфизм H на G называется локальным накрывающим гомоморфизмом φ. Эта терминология оправдывается следующей основной теоремой, доказательство которой составляет главную цель статьи.

Для каждого допустимого пространства S с группой 1-го рода G, имеющей собственную фундаментальную область D, существует допустимое пространство T такое, что 1) T есть накрывающее пространство для S; 2) H действует как группа гомеоморфизмов 1-го рода на T и имеет собственную фундаментальную область E, гомеоморфную D; 3) если $y \in T$, $h \in H$, то $\psi(hy) = \varphi(h)\psi(y)$, где ψ — накрывающее отображение T на S, а φ — естественный гомоморфизм H на G.

В частности, если S односвязно, то G изоморфна H и все соотношения на G локальны.

В заключение указываются некоторые возможные конкретизации основной теоремы.

А. И. Мальцев

4751. Об одном условии равностепенной непрерывности для групп преобразований. Баум (An equicontinuity condition for transformation groups. Baum John D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 656—662 (англ.)

Автор указывает, что Какутани принадлежит неопубликованная ранее теорема, которая в обычных терминах теории динамических систем может быть сформулирована следующим образом: для того, чтобы компактное минимальное множество X было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала траектория, вдоль ко-

торой каждая непрерывная на R функция $f(x)$ была бы почти периодической в смысле Бора.

Приводится доказательство указанной теоремы. Далее эта теорема обобщается на случай, когда X — пространство с равномерной топологией, а вместо однопараметрической группы движений рассматривается произвольная абелева группа преобразований пространства X. *С. В. Фомин*

4752. О полиномах Пуанкаре классических групп. Литлвуд (On the Poincaré polynomials of the classical groups. Littlewood D. E.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 4, № 112, 494—500 (англ.)

Вычисление полиномов Пуанкаре классических групп сводится к вычислению некоторых интегралов (Г. Вейль, Классические группы, М.—Л., 1947, стр. 316—321). Эти интегралы были уже вычислены Мурнаганом (Murnaghan F. D., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1952, **38**, 606—611). В работе дается более простой способ вычисления этих интегралов и указываются неточности в вычислении Мурнагана. *Н. Я. Виленкин*

4753. К теории упорядоченных полугрупп. Виноградов А. А., Уч. зап. Ивановского пед. ин-та, 1953, **4**, 19—21

В работе дается пример упорядоченной полугруппы, не вложимой в группу, а именно доказывается, что полугруппа, приведенная Мальцевым А. И. (Math. Ann., 1937, **113**, 686—691) в качестве примера полугруппы, не вкладываемой в группу, может быть упорядочена. *Н. Г. Алимов*

4754. Об одной упорядоченной полугруппе. Чехата (On an ordered semigroup. Chehata C. G.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, № 111, ч. 3, 353—356 (англ.)

Известно, что полугруппу с законом правой и левой сократимости не всегда можно включить в группу. Пример такой полугруппы был указан А. И. Мальцевым (Math. Ann., 1937, **113**, 686—691). В реферируемой статье ставится вопрос о том, нельзя ли всякую упорядоченную полугруппу включить в группу, поскольку упорядоченность налагает определенные ограничения на строение полугруппы. Оказывается, что и для упорядоченных полугрупп вопрос решается отрицательно. Для доказательства автор показывает, что упомянутую выше полугруппу можно упорядочить. Обычным путем отсюда следует, что и упорядоченные кольца не всегда могут быть погружены в тела.

Эти вопросы аналогичным путем были решены ранее А. А. Виноградовым (см. реф. 4753). *А. И. Мальцев*

4755. О полугруппах, не содержащих идемпотентных элементов. Тесье (Sur les demi-groupes ne contenant pas d'élément idempotent. Teissier Marianne), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 22, 1375—1377 (франц.)

Пусть в полугруппе D имеет место деление слева и D не имеет идемпотентных элементов. Как доказывается в работе, для существования гомоморфизма D на некоторую полугруппу D', обладающую идемпотентами, необходимо и достаточно, чтобы D обладала подполугруппой E, удовлетворяющей условиям: а) если u и xu принадлежат E, то и x принадлежит E, б) для каждого $ea \in ED$ имеет место $eaE \subset Ea$. На примере показывается, что некоторые свойства идеалов полугрупп, обладающих идемпотентами, могут оказаться неверными в полугруппах, не имеющих идемпотентов. *Е. С. Ляпин*

4756 К. Введение в теорию конечных групп. Ледерман (Introduction to the theory of finite groups. Ledermann Walter, 2nd ed., VII+160 pp., Oliver and Boyd, Edinburgh and London, Interscience Publishers, Inc., N. Y., 1953, 8/6 Sh.)

Книга входит в серию «University Mathematical Texts» и содержит вполне элементарное изложение теории конечных групп, предназначенное для читателей, не знакомых с теорией групп. Первое издание вышло в 1949 г.; второе издание сравнительно мало отличается от первого. Книга состоит из шести глав: 1. Понятие о группе. 2. Комплексы и подгруппы. 3. Группы подстановок. 4. Инвариантные подгруппы. 5. Подгруппы Силова и p-группы. 6. Абелевы группы.

В гл. 1 приведены две системы групповых аксиом, даны простейшие примеры конечных и бесконечных групп, введены понятия изоморфизма, порядка элемента, циклической группы. В гл. 2 дано определение подгруппы, рассмотрено разложение по простому и двойному модулю, доказана теорема Лагранжа и простейшие теоремы о пересечении и умножении подгрупп. В гл. 3 сравнительно подробно изложена теория групп подстановок: рассмотрены простейшие свойства симметрической и знакопеременной групп, доказана теорема Кэли, введено понятие транзитивности, примитивности и группы преобразований (в частности линейных), сравнительно подробно рассмотрены группы правильных многогранников. В гл. 4 определены инвариантные подгруппы, фактор-группы, центр, коммутант, гомоморфизм и автоморфизм и доказаны простейшие теоремы, связанные с этими понятиями; доказана также теорема Жордана—Гельдера (для конечных групп) и теорема о простоте знакопеременной группы степени больше 4. В гл. 5 доказаны первая и вторая теоремы Силова; показано, как эти теоремы используются для доказательства непростоты групп некоторых порядков; дано доказательство разрешимости групп порядка p^m. В гл. 6 элементы теории абелевых групп изложены (в отличие от первого издания) в аддитивной записи; для конечных абелевых групп доказана фундаментальная теорема, введены понятия элементарных делителей и инвариантов; доказана теорема о разложении в прямую сумму бесконечных абелевых групп с конечным числом образующих.

Новых научных результатов книга не содержит. Изложение очень ясное и простое, много хорошо подобранных примеров. *В. К. Туркин*

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

4757. О несмешанных идеалах в регулярных локальных кольцах. Нортконт (On unmixed ideals in regular local rings. Northcott D. G.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, № 9, 20—28 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы, принадлежащей Коэну (Cohen I., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **59**, 54—106): в регулярном локальном кольце

любой идеал ранга r, имеющий базис, состоящий из r элементов, является несмешанным. Этот результат усиливается: любая степень такого идеала есть несмешанный идеал.

Пользуясь этим, автор показывает, что:

1) если Q— регулярное локальное кольцо, $\mathfrak{p}$ — его простой идеал и кольцо $Q/\mathfrak{p}$ регулярно, то любая степень $\mathfrak{p}$ есть примарный идеал;

2) Если V — неприводимое многообразие в аффинном пространстве, определяемое простым идеалом $\mathfrak{p}$, и если $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}$ — простой идеал, которому принадлежит одна из примарных компонент некоторой степени идеала $\mathfrak{p}$, то многообразие W, определяемое идеалом $\mathfrak{p}_0$, является особенным на V.

Предлагаемое доказательство исходных результатов основывается на рассмотрении расширений локальных колец, получаемых присоединением неизвестных, и на вводимом после этого естественным образом понятии «неспециального» базиса максимального идеала локального кольца.

А. И. Узков

4758. Заметка о конечных простых кольцах. Шафер (A remark on finite simple rings. Schafer R. D.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 696—697 (англ.)

Доказывается, что каждое простое конечное кольцо (т. е. полное кольцо матриц порядка n над конечным полем F) порождается двумя элементами. В качестве таких элементов можно взять

$$a = e_{n1} + \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,\,i+1} \text{ и } b = \theta e_{11},$$

где e_{ij} — матричные единицы, а θ — элемент, порождающий поле F (образующий элемент циклической мультипликативной группы поля F).

В. М. Курочкин

4759. Алгебры Ли типа F. Томбер (Lie algebras of type F. Tomber Marvin L.). Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, №5, 759—768 (англ.)

Изучаются автоморфизмы исключительной алгебры Ли F_4 ранга 52 над алгебраически замкнутым полем Ω характеристики нуль. (Chevalley C., Schafer R. D., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1950, **36**, 137—141).

Результаты применяются к изучению алгебр Ли типа F, т. е. алгебр Ли L над полем Φ характеристики нуль, которые при расширении Φ до алгебраического замыкания Ω превращаются в алгебру F_4.

В частности, доказывается, что необходимым и достаточным условием того, чтобы алгебра Ли L над полем Φ характеристики нуль была алгеброй типа F, является изоморфизм L с алгеброй дифференцирований (т. е. линейных преобразований D, удовлетворяющих соотношению $D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$) исключительной простой центральной J-алгебры $\mathfrak{J}$ над полем Φ.

А. И. Ширшов

4760. Расширения алгебр Ли и трехмерная группа когомологий. Голдберг (Extensions of Lie algebras and the third cohomology group. Goldberg S. I.), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 4, 470—476 (англ.)

Пусть L — произвольная алгебра Ли, P — некоторое ее линейное представление и L^+ — расширение алгебры L с помощью представления P, т. е. алгебра Ли, содержащая пространство V представления P в качестве идеала центра, фактор-алгебра L^+/V, по которому изоморфна алгебре L, а естественное представление фактор-алгебры L^+/V в ядре V совпадает с заданным представлением P. Пусть далее R — представление алгебры L, пространство U которого содержит инвариантное подпространство W, фактор-пространство по которому является пространством V, причем при естественном гомоморфизме $U \to V$ представление R переходит в представление P.

Решается задача: при каких условиях существует расширение L^{++} алгебры L с помощью представления R, фактор-алгебра которого L^{++}/W по идеалу W изоморфна алгебре L^+. Эта задача аналогична известной задаче Тейхмюллера для ассоциативных алгебр и имеет аналогичное решение: для существования алгебры L^{++} необходимо и достаточно, чтобы был тривиален некоторый трехмерный класс когомологий алгебры L относительно представления Q, порожденного представлением R в подпространстве W.

М. М. Постников

4761. О теореме Жордана — Гельдера в произвольных структурах. Соркин Ю. И., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, **71**, № 1, 155—165

В структуре S для элементов $a \geqslant b$ вводится отношение нормальности aNb. Частным a/b называется совокупность таких элементов x, что $a \geqslant x \geqslant b$; если aNb, то частное a/b называется фактором. Частное a/b называется расширением частного c/d, если отображение $x \to x + b = y$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между частными c/d и a/b и если обратное отображение дается формулой $y \to cy = x$, т. е. $x = c(x + b)$; если, кроме того, при указанных отображениях сохраняется отношение нормальности, то расширение называется нормальным. Два частных a/b и c/d, являющиеся расширениями одного и того же третьего частного u/v, называются прямо-изоморфными, если взаимно однозначное соответствие между их элементами, индуцированное вышеуказанным соответствием между этими частными и частным u/v, обладает следующими свойствами: 1) сумме и произведению в одном частном соответствует сумма и произведение в другом; 2) при этом соответствии сохраняется отношение нормальности.

Если даны два нормальных ряда $a_r N a_{r-1} N \ldots N a_2 N a_1 N a_0$ и $b_s N b_{s-1} N \ldots N b_2 N b_1 N b_0$, то, полагая $a_{ij} = a_i + a_{i+1} b_j$, $b_{ji} = b_j + b_{j+1} a_i$, $i = 0, 1, \ldots r-1$; $j = 0, 1, \ldots, s-1$, получим две системы рядов

$$a_{is} \geqslant a_{i,\,s-1} \geqslant \ldots \geqslant a_{i1} \geqslant a_{i0}, \quad i = 0, 1, \ldots, r-1$$

$$b_{jr} \geqslant b_{j,\,r-1} \geqslant \ldots \geqslant b_{j1} \geqslant b_{j0}, \quad j = 0, 1, \ldots, s-1,$$

называемых рядами Цасенхауза. Частные $a_{i,j+1}/a_{ij}$ и $b_{j,\,i+1}/b_{ji}$ называются соответственными.

Элемент a называется дедекиндовым относительно упорядоченной пары элементов b и c, если из того, что $a \geqslant b$, следует равенство $a(b + c) = b + ac$.

Доказывается теорема: В том и только в том случае ряды Цасенхауза для любых двух нормальных рядов будут нормальными, а пары соответ-

ствующих факторов прямо-изоморфными, когда для любых таких четырех элементов x_2, y_2, x_1, y_1 структуры S, что $x_2 N x_1$, $y_2 N y_1$, выполняются следующие условия:

1. Если $x_2 \geqslant y_2$, то $(x_1 + y_2)\,N\,(x_1 + y_1)$.

2. Существует по крайней мере одна пара таких элементов u и v, что uNv.

3. а) частное $(x_1 + x_2y_2) / (x_1 + x_2y_1)$ является нормальным расширением частного $(x_1 + u)/(x_1 + v)$;

б) частное $(y_1 + y_2x_2) / (y_1 + y_2x_1)$ является нормальным расширением частного $(y_1 + u/ (y_1 + v)$.

4. а) Каждый элемент $x \in (x_1 + u) / (x_1 + v)$ является дедекиндовым относительно x_1 и u;

б) каждый элемент $y \in (y_1 + u) / (y_1 + v)$ является дедекиндовым относительно y_1 и v.

5. а) u является дедекиндовым относительно x_1 и каждого z из u/v; б) u является дедекиндовым относительно y_1 и каждого z из u/v.

А. Х. Лившиц

4762. Отрезки в дедекиндовой структуре. Гельфанд М. С., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та 1953, **71**, № 1, 199—204

В структурах рассматривается соотношение «между»: элемент c называется лежащим между элементами a и b, если $ac + bc = c = (a + c) \times (b + c)$. Устанавливаются некоторые свойства этого соотношения. Отрезком $[a, b]$ структуры называется множество элементов, лежащих между a и b. Доказывается, что в дедекиндовой структуре всякий отрезок образует подструктуру с 0 и 1.

А. Х. Лившиц.

4763. Аксиомы булевых алгебр. Шолендер (Postulates for Boolean algebras. Sholander Marlow), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 460—464 (англ.)

Вводятся две новые системы аксиом булевой алгебры. 1. Рассматривается замкнутая относительно сложения и умножения система $\mathfrak{S}$.

Обозначая $a + b = (a, b)$, $a + (b, c) = (a, b, c)$, вообще, $a_1 + (a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, автор доказывает что булево кольцо с единицей $\mathfrak{S}$ определяется следующими двумя тождественными соотношениями:

$$(a, b, c, b, c, b, a) = b$$

и

$$(a, (cc)\,a, a\,(b + c), b\,(cd)) = (ba\,(II)\,a, d\,(b + b), c\,(bd)),$$

где I — фиксированный элемент из $\mathfrak{S}$ (I является единицей кольца). Первое из этих тождественных соотношений определяет булеву группу.

2. Булева алгебра $\mathfrak{S}$ относительно операции черточки Шеффера определяется одной аксиомой.

Из $(x \mid (y' \mid y))'' = (a \mid (b' \mid c))''$ следует $x = (b \mid a) \mid (c' \mid a)$, где $u' = u \mid u$ и $u'' (u')'$. Замеченная опечатка: стр. 464, строка 5 сверху. Напечатано $x + y = (x \mid y)'$, должно быть $x + y = (x \mid y) \mid (x' \mid y')$.

Е. Г. Шульгейфер

См. также: 4693 **РЕЦ**, 4718, 4723, 4725, 4770, 4800, 4828, 4834, 4896, 4897, 4919

ТОПОЛОГИЯ

4764. О некоторых проблемах Лузина, касающихся частей натурального ряда. Новак Йозеф, Чехословацкий мат., ж., 1953, **3**, № 4, 385—395 (русск.; резюме англ.)

В предположении справедливости гипотезы континуума оригинальным применением максимального бикомпактного (чеховского) расширения βN множества N всех натуральных чисел утвердительно решаются указываемые ниже четыре проблемы Н. Н. Лузина (Изв. АН СССР, 1947, **11**, 403—410).

Две системы α и β подмножеств множества N называются взаимно ортогональными, если пересечение любых $A \in \alpha$ и $B \in \beta$ конечно (в частности, пусто); трансфинитная последовательность $\{A_\lambda\}$ подмножеств множества N называется существенно возрастающей (убывающей), если для любых λ и $\mu > \lambda$ разность $A_\lambda \setminus A_\mu$ конечна (бесконечна), а разность $A_\mu \setminus A_\lambda$ бесконечна (конечна); покрышкой системы α подмножеств множества N называется всякое такое множество B, что для любого $A \in \alpha$ разность $A \setminus B$ конечна.

1-я проблема: Существуют ли взаимно ортогональные системы α мощности $\aleph_0$ и β мощности $\aleph_1$, неотделимые друг от друга (непересекающимися) покрышками?

2-я проблема: Существуют ли взаимно ортогональные существенно возрастающие последовательности α типа ω_0 и β типа ω_1, неотделимые друг от друга покрышками?

3-я проблема: Существуют ли две существенно возрастающие взаимно ортогональные последовательности типа ω_1, для которых имеется с точностью до конечной разности всего лишь одна покрышка?

4-я проблема: Существует ли такая существенно убывающая последовательность $\{A_\lambda\}$ типа ω_1, что для любого бесконечного множества B хотя бы одна разность $B \setminus A_\lambda$ бесконечна? *Ю. М. Смирнов*

4765. О пространствах с ветвящимися базами окрестностей. Папић (O prostorima sa razvrstano uređenom bazom okolina. Papić Pavle), Glasnik mat.-fis. i astron., 1953., сер. 2, 8, № 1, 30—43 (хорв.; резюме франц.)

Подробно доказываются некоторые результаты, ранее сообщенные автором (РЖМат, 1954, 1591). Пусть R — пространство с ветвящейся базой. Доказывается, что 1) R всюду разрывно, 2) R наследственно нормально (а не вполне нормально, как ошибочно утверждается в реф. 1591), 3) в R существует такая база D, что для любого $x \in R$ и любой окрестности $Ox \in D$ система всех $U \in D$, содержащих Ox, вполне упорядочена в смысле теорети-

ко-множественного вложения, 4) если R имеет счетное всюду плотное множество, то оно имеет и счетную базу, 5) если R компактно, то оно обладает счетным всюду плотным множеством.

Ю. М. Смирнов

4766. Несколько замечаний о равномерных пространствах. Аотани (Some remarks on the uniform space. Aotani Kiyo), Osaka Math. J., 1953, 5, № 1, 93—98 (англ.)

Автор рассматривает равномерные пространства в самом общем смысле, подчиняя их лишь условию согласования с топологией и условию (W), представляющему собой локальный аналог аксиомы $U3$ Вейля (Weil A., Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale (Actualités scient. et industr. Publ. Inst. Math. Univ. de Strasbourg. Fasc. 1), 40 pp., Hermann et Cie, Paris, 1938).

Для каждого такого пространства R строится пополнение, которое оказывается полным равномерным пространством (удовлетворяющим условию (W)), содержащим всюду плотное подмножество R^*, на которое R равномерно, непрерывно и гомеоморфно отображается. Аналогичная теорема имеется у Коэна (Cohen L. W., Duke Math. J., 1937, 5, 174—183).

А. С. Шварц

4767. Одновременные разбиения двух множеств. Томас (Simultaneous partitionings of two sets. Thomas G. H. M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 1, 69—79 (англ.)

Понятие разбиения множеств, лежащих в метрических пространствах, было введено и удачно применено Бингом для решения многих интересных задач, в частности, для положительного решения известной задачи о том, можно ли во всяком компактном локально связном континууме ввести выпуклую метрику (Bing R., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 812). Всякую конечную систему попарно непересекающихся открытых связных подмножеств диаметра $<\varepsilon$ множества M, сумма которых плотна в M, называют ε-разбиением множества M. Множество M называют разбиваемым, если при любом $\varepsilon>0$ оно имеет ε-разбиение. Говорят, что множество M обладает свойством S, если его можно представить при любом $\varepsilon>0$ в виде суммы конечного числа связных подмножеств диаметра $<\varepsilon$.

Пусть $N\subset M$; одновременным разбиением множеств M и N автор называет всякое такое разбиение $\gamma=\{\Gamma_i\}$ множества M, что множества $N\cap\Gamma_i$ составляют разбиение множества N. Если каждое из множеств Γ_i и каждое из множеств $N\cap\Gamma_i$ обладает свойством S, то γ называется одновременным S-разбиением.

Доказывается целый ряд теорем, из которых приведем следующую (теорема 4):

Для любых компактных разбиваемых множеств M и $N\subset M$ существует последовательность $\{\gamma_n\}$ последовательно вписанных друг в друга одновременных S-разбиений множеств M и N, причем γ_n является $\frac{1}{n}$-разбиением.

Ю. М. Смирнов

4768. Пример абсолютного окрестностного ретракта, являющегося совместной границей трех областей трехмерного евклидова пространства. Любанский (An example of an absolute neighbourhood retract, which is the common boundary of three regions in the 3-dimensional Euclidean space. Lubański M.), Fundam. math., 1953, 40, 29—38 (англ.)

Строится пример континуума, обладающего указанными в заголовке свойствами. Доказывается, что построенный континуум может быть представлен в виде суммы конечного числа сколь угодно малых по диаметру абсолютных ретрактов. Ставится вопрос: можно ли ретракты-слагаемые выбрать таким образом, чтобы всевозможные их пересечения (по два, по три и т. д.) были абсолютными ретрактами и чтобы их сумма все же обладала указанными в заголовке свойствами. Интерес работы увеличивается от того, что плоские континуумы, обладающие аналогичными свойствами, имеют, как известно, чрезвычайно сложную структуру, непременно являясь неразложимыми континуумами или суммами двух неразложимых (теорема Куратовского).

П. С. Александров

4769. Комбинаторная топология незамкнутых множеств. Ситников К. А., Матем. сб., 1954, 34 (76), № 1, 3—54

В работе, во-первых, доказывается теорема двойственности, которая (вследствие своей общности, богатства входящих в нее групп и простоты формулировки) может считаться окончательным решением общей проблемы двойственности для любых множеств, лежащих в многообразиях (что не исключает, конечно, вопроса о дуализируемости других групп, естественно определяемых для незамкнутых множеств).

Во-вторых, устанавливаются теоремы двойственности нового, более сильного типа, касающиеся не гомологических групп, а спектров, определяющих эти группы,— так называемые спектральные теоремы двойственности. Последние приводят, в частности, и к новым фактам, касающимся групп (например, дуализируемость групп незацепляемости). Наконец, в работе исследуются некоторые более специальные задачи, возникающие в теории двойственности: деформационная устойчивость ∇-групп, области двойственности и др.

Общий закон двойственности, доказательство которого составляет содержание первой главы работы, формулируется следующим образом:

Пусть M^n — замкнутое ориентируемое n-мерное гомологическое многообразие, p и q — неотрицательные целые числа, дающие в сумме $n-1$. Предполагается, что M^n ациклично в размерностях q и $q+1$ по данной произвольной группе коэффициентов $\mathfrak{G}$. Тогда для любого множества $A\subset M^n$ и $B=M^n\setminus A$ группы ∇^pA и Δ^qB, взятые по области коэффициентов $\mathfrak{G}$, изоморфны.

При этом Δ^qB есть фактор-группа группы следующим образом определенных q-мерных Δ-циклов в B по подгруппе ограничивающих циклов: под Δ-циклом

$$z^q=\{z_k^q,\ x_k^{q+1}\}$$

в B понимается последовательность лежащих на каком-либо компакте $\psi\subseteq B$ ε_k-циклов z_k^q и ε_k-цепей x_k^{q+1}, $\varepsilon_k\to0$, причем $\Delta x_k^{q+1}=z_{k+1}^q-z_k^q$. Цикл z^q ограничивает в B, если на некотором компакте

ψ', $\psi \subset\subset \psi' \subset\subset B$ существуют такие ε'_k-цепи y_k^{q+1}, x_k^{q+2}, $\varepsilon'_k \to 0$, что

$$\Delta y_k^{q+1} = z_k^q, \quad \Delta x_k^{q+2} = y_{k+1}^{q+1} - y_k^{q+1} - x_k^{q+1}.$$

Группы $\nabla^p A$ определяются следующим образом. Если (открытое звездно-конечное) покрытие β множества A вписано в покрытие α того же множества, то определены симплициальные отображения («проекции») $\bar{\omega}_\alpha^\beta$ нерва β в нерв α. Пусть z^p — какой-нибудь (бесконечный) ∇-цикл на α. Проекция $\bar{\omega}_\alpha^\beta$ определяет на β цикл $z_\beta^p = \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p$ по формуле $(\pi_\beta^\alpha z_\alpha^p t_\beta^p) = (z_\alpha^p \bar{\omega}_\alpha^\beta t_\beta^p)$ для любого ориентированного симплекса t_β^p нерва β; циклы z_β^p и $z_\beta'^p$, соответствующие двум разным проекциям $\bar{\omega}_\alpha^\beta$ и $\bar{\omega}'^\beta_\alpha$, гомологичны между собою в β. Пусть z_α^p и z_β^p — два каких-нибудь ∇-цикла множества A (т. е. два ∇-цикла, лежащих на нервах каких-либо покрытий α и β множества A). Скажем, что они гомологичны между собою в A, если существует такое покрытие γ, вписанное и в α и в β, что

$$\pi_\gamma^\alpha z_\alpha^p \sim \pi_\gamma^\beta z_\beta^p \text{ в } \gamma.$$

Это определение гомологии разбивает множество всех p-мерных ∇-циклов множества A на гомологические классы, которые и являются элементами группы $\nabla^p A$. Сложение двух классов $\dot{z}^p \in \nabla^p A$ и $\dot{z}'^p \in \nabla^p A$ определяется следующим образом. Берем такое покрытие α (оно всегда существует), что и в $\dot{z}^p$ и в $\dot{z}'^p$ имеется по циклу z_α^p, соответственно $z_\alpha'^p$, лежащему на α. Класс, содержащий цикл $z_\alpha^p + z_\alpha'^p$, и есть, по определению, класс $\dot{z}^p + \dot{z}'^p$; легко проверяется, что это определение не зависит от входящих в него элементов произвола.

Изоморфизм M, отображающий $\nabla^p A$ на $\Delta^q B$, строится некоторым естественным способом: сначала определяется «внешняя» ∇-группа $\nabla_{\text{вн}}^p A$ множества A. Ее элементы суть классы гомологичных между собою «вокруг A» «внешних» ∇-циклов, причем внешний ∇-цикл — это ∇-цикл любой триангуляции τ какой-либо окрестности λ множества A. Если триангуляция τ' следует за триангуляцией τ (т. е. каждый симплекс τ' лежит на некотором симплексе τ), то определен канонический сдвиг $\sigma_\tau^{\tau'}$ триангуляции τ' в τ; сопряженный гомоморфизм $(\bar{\sigma}_\tau^\tau x t') = (x \sigma_\tau^{\tau'} t')$ определяет «∇-подразделение» в триангуляции τ' ∇-цикла триангуляции τ. Два внешних ∇-цикла z_{τ_1} и z_{τ_2}, лежащие соответственно на триангуляциях τ_1 и τ_2, называются гомологичными между собою вокруг A, если существует такая триангуляция τ, следующая за τ_1 и за τ_2, что

$$\bar{\sigma}_\tau^{\tau_1} z_{\tau_1} \sim \bar{\sigma}_\tau^{\tau_2} z_{\tau_2} \text{ в } \tau.$$

Изоморфизм M есть произведение трех изоморфизмов: $M = \Gamma D J^{-1}$. Первый из них, J^{-1}, есть изоморфизм, обратный к естественному изоморфизму высечения J группы $\nabla_{\text{вн}}^p A$ на $\nabla^p A$. Второй изоморфизм D аналогичен изоморфизму Пуанкаре; он отображает $\nabla_{\text{вн}}^p A$ на естественно определяющуюся группу $\Delta_{\text{вн}}^{q+1} A$. Этот изоморфизм составляет центральную часть доказательства. Наконец, третий изоморфизм Γ отображает группу $\Delta_{\text{вн}}^{q+1} A$ на $\Delta^q B$. При построении этого изоморфизма применяется прием, употребленный Стинродом и еще раньше Колмогоровым.

Главную часть второй главы составляет формулировка и доказательство спектрального закона двойственности. Группы $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$ являются предельными группами прямых спектров $\{\nabla^p \alpha, \pi_\beta^\alpha\}$ и $\{\Delta^q \psi, E_{\psi'}^\psi\}$, где α, β — покрытия множества A, а ψ, ψ' — компакты, лежащие в B, и $E_{\psi'}^\psi$ — гомоморфизм вложения. Спектральный закон двойственности Ситникова утверждает, что не только предельные группы этих спектров изоморфны, но сами эти спектры эквивалентны между собою (два спектра называются эквивалентными, если от одного из них можно перейти к другому конечным числом операций, каждая из которых есть или переход от спектра к спектру, имеющему данный спектр своей конфинальной частью, или переход от данного спектра к изоморфному ему спектру). Доказательство спектрального закона двойственности опирается на рассмотрение канонических покрытий и канонических окрестностей, введенных референтом при доказательстве его закона двойственности.

Из спектрального закона двойственности выводится дуализируемость группы незацепляемости, т. е. подгруппы группы $\Delta^q(B, \mathfrak{B}) = \Delta_c^q(B, \mathfrak{B})$ (для бикомпактной области коэффициентов это равенство имеет место), состоящей из гомологических классов циклов, имеющих нулевой коэффициент зацепления со всяким скользящим циклом множества A (инвариантность этой группы была доказана референтом). Автор доказывает, что группа незацепляемости множества B изоморфна группе ∇-незацепляемости множества A, состоящей из всех $\dot{z}^p \in \nabla^p A$, имеющих нулевое скалярное произведение со всяким $\zeta^p \in \delta^p A$. Снова доказывается не только изоморфизм групп, но и эквивалентность определяющих эти группы спектров («спектров незацепляемости»). Закон двойственности П. С. Александрова также усиливается до некоторого спектрального закона двойственности. В той же главе подробно исследуется взаимоотношение между законами двойственности Ситникова и Александрова и устанавливается, в каком смысле первый из них сильнее второго.

В третьей главе доказывается деформационная устойчивость групп $\nabla^p A$ (это значит, что при всякой ретрагирующей деформации множества A на какое-нибудь множество $A_1 \subset A$ группы $\nabla^p A$ изоморфно отображаются на группы $\Delta^p A_1$). Так как группы $\Delta^q B$ очевидно обладают деформационной устойчивостью, то весь закон двойственности Ситникова устойчив, т. е. оперирует лишь с устойчивыми группами. Вопрос об устойчивости других общих теорем двойственности остается открытым, для закона двойственности Александера — Колмогорова устойчивость не имеет места.

В четвертой главе изучаются области двойственности в смысле референта, т. е. системы $\mathfrak{S}$ множеств, лежащих во всевозможных сферических пространствах S^n, удовлетворяющие следующим условиям: (а) если $A \in \mathfrak{S}$, $A \subseteq S^n$ и $B = S^n \setminus A$, то и $B \in \mathfrak{S}$; (б) если $A \in \mathfrak{S}$, $A \subseteq S^n$ и $A' \subseteq S^{n'}$ гомеоморфно A, то и $A' \in \mathfrak{S}$. Несколько видоизменяя определение референта, автор называет область двойственности элементарной, если для входящих в нее множеств A для любых размерностей и любых областей коэффициентов $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ выполнены двойственности зацепления

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{A}) \mid \Delta_c^q(B, \mathfrak{B});$$

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{B}) \mid \Delta_c^q(B, \mathfrak{A}).$$

Здесь, как и ниже, группы по $\mathfrak{B}$ берутся в некоторой (однозначно определяемой самой двойственностью) топологии. Автор доказывает, что множества, входящие в максимальную элементарную область двойственности, допускают следующую инвариантную характеристику: для них должны иметь место естественные (т. е. порождаемые скалярным умножением соответствующих циклов) двойственности

$$\Delta^p(A, \mathfrak{A}) \mid \nabla^p(A, \mathfrak{B}); \quad \nabla^p(A, \mathfrak{A}) \mid \Delta^p(A, \mathfrak{B}).$$

Автор называет множества, входящие в максимальную элементарную в его смысле область двойственности, K-множествами; для них имеет место естественный изоморфизм $\Delta^p A = \Delta_c^p A$, а следовательно, и понтрягинские двойственности зацепления

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{A}) \mid \Delta_c^q(B, \mathfrak{B});$$

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{B}) \mid \Delta_c^q(B, \mathfrak{A}).$$

В основе этих результатов лежит следующее предложение, выясняющее отношение ситниковского закона двойственности к понятию зацепления: для любых двух элементов $\xi^p \in \nabla^p A$, $\zeta^p \in \Delta^p A$ (группы $\nabla^p A$ и $\Delta^p A$ взяты по двойственным областям коэффициентов) имеем $(\xi^p \zeta^p) = \eta(M\xi^p, \zeta^p)$, где η обозначает коэффициент зацепления.

П. С. Александров

4770. Гомология компактных групп Ли. Дынкин Е. Б., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 5, 73—120

Обзорная статья, посвященная систематическому изложению гомологий компактных групп Ли в направлении классических работ Понтрягина, Хопфа и Самельсона. Кроме известных результатов, имеются некоторые новые: рассмотрено кольцо Понтрягина в смысле слабых гомологий и построены канонические наборы примитивных классов гомологий в классических группах (построенные классы оказываются совпадающими с классами Понтрягина). Эти результаты ранее опубликованы автором в кратком изложении (РЖМат, 1954, 2873). Новые результаты французских математиков в статью не включены.

Статья начинается главой «Основные понятия и факты комбинаторной топологии полиэдров». В ней имеются некоторые неточности. Например, цепь (стр. 77) определена таким образом, что построение границы, обладающей нужными свойствами, невозможно (опущено условие равенства нулю на вырожденных симплексах). На стр. 79 n-мерное ориентируемое многообразие определено как n-мерный связный полиэдр, n-мерная целочисленная группа гомологий которого является свободной циклической. Очевидно, что существуют полиэдры, обладающие этим свойством и не являющиеся даже псевдомногообразиями (например, двумерная сфера с диаметром). Там же утверждается, что n-мерная группа слабых гомологий n-мерного связного полиэдра либо тривиальна, либо циклична, а на стр. 81 утверждается, что пространство траекторий инволютивного гомеоморфного отображения ориентируемого многообразия на себя является ориентируемым многообразием. Неправильность обоих утверждений легко доказывается построением соответствующих примеров.

М. М. Постников

4771 РЖМ. **Введение в топологию.** Лефшец (Introduction to topology. Lefschetz Solomon, VIII + 218 pp., Princeton Mathematical Series, Vol. II, Princeton University Press, 1949, 4.00 doll.) [Рецензия: Собчик (Sobczyk Andrew), Scripta math., 1953, 19, № 2—3, 162—165 (англ.)]

См. также: 4749, 4750, 4779, 4780, 4791, 4794, 4795, 4802, 4803, 4923

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4772. О компактных мерах. Марчевский (On compact measures. Marczewski E.), Fundam. math., 1953, 40, 113—124 (англ.)

Под мерой автор понимает всякую неотрицательную конечноаддитивную функцию μ, определенную на каком-либо теле $\boldsymbol{M}$ подмножеств фиксированного множества X и удовлетворяющую условию $\mu(X) = 1$. Класс $\boldsymbol{F}$ подмножеств множества X называется аппроксимирующим $\boldsymbol{M}$ относительно μ, если для всякого множества $E \in \boldsymbol{M}$ и всякого $\eta > 0$ существуют такие множества $P \in \boldsymbol{F}$ и $D \in \boldsymbol{M}$, что $D \subset P \subset E$ и $\mu(E - D) < \eta$. Класс подмножеств некоторого множества называется компактным, если всякая последовательность множеств этого класса, конечные отрезки которой имеют непустые пересечения, сама имеет непустое пересечение. Мера μ называется компактной, если существует компактный класс $\boldsymbol{F}$, аппроксимирующий $\boldsymbol{M}$ относительно μ. Можно ли в общем случае компактной меры выбрать $\boldsymbol{F}$ внутри $\boldsymbol{M}$, неизвестно; если $\boldsymbol{M}$ есть борелевское тело, то это возможно. Доказывается, что всякая компактная мера счетноаддитивна (обратное неверно) и что ее естественное продолжение на минимальное борелевское тело множеств также компактно.

Пусть T — совокупность индексов; X_t, где

$t \in T$, — множества; μ_t — мера, определенная на некотором теле M_t подмножеств множества X_t; X^T — множество всех функций x, относящих каждому индексу $t \in T$ некоторый элемент $x_t \in X_t$; Z — подмножество множества X^T, обладающее тем свойством, что для всякой последовательности индексов $t_n \in T$ и всякой последовательности элементов $\xi_{t_n} \in X_{t_n}$ существует функция $x \in Z$, для которой $x_{t_n} = \xi_{t_n}$; $C_t(E)$, где $E \subset X_t$, — множество всех функций $x \in Z$ с $x_t \in E$; μ_t^* — мера, определенная формулой $\mu_t^*(C_t(E)) = \mu_t(E)$ на теле M_t^*, состоящем из множеств $C_t(E)$; M — наименьшее тело, содержащее все тела M_t^*. Всякую меру, определенную на M и совпадающую на M_t^* с μ_t^*, автор называет произведением мер μ_t. Доказывается, что всякое произведение компактных мер компактно и, следовательно, может быть продолжено в счетноаддитивную меру, определенную на борелевском теле множеств. Эту теорему, близкую к известной теореме А. Н. Колмогорова о продолжении мер в бесконечномерных пространствах (Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, М. — Л., 1936, 36—42) и сформулированную в терминах абстрактной теории меры, автор дополняет точным обобщением теоремы Колмогорова на компактные меры. По словам автора, анализ доказательства теоремы Колмогорова и привел его к определению компактной меры.

Из других результатов работы отметим следующий: если компактная мера определена на борелевском теле множеств и неатомична, то всякое множество положительной меры содержит подмножество меры нуль и мощности континуума.

Замеченная опечатка: в определении неатомической меры (стр. 114) пропущено условие $D \subset E$.

В. А. Рохлин

4773. О квазикомпактных мерах. Рылл-Нардзевский (On quasi-compact measures. Ryll-Nardzewski C.), Fundam. math., 1953, **40**, 125—130 (англ.)

Автор систематически пользуется терминологией Марчевского (Marczewski E.) (см. реф. 4772), рассматривая, однако, лишь σ-меры, т. е. счетноаддитивные меры, определенные на борелевских телах. σ-мера μ, определенная на теле M подмножеств множества X, называется квазикомпактной, если для всякой последовательности множеств $Q_n \in M$ и всякого $\eta > 0$ существует такое множество $Q_0 \in M$, что $\mu(Q_0) > 1 - \eta$ и пересечения $Q_0 Q_n$ образуют компактный класс. Доказывается, что σ-мера квазикомпактна в том и только в том случае, если она компактна на всяком частичном борелевском теле, порожденном счетным классом множеств; в частности, всякая компактная σ-мера квазикомпактна.

Как известно, σ-мера называется полной, если всякое подмножество множества меры нуль измеримо; наименьшее полное продолжение σ-меры называется ее пополнением. Доказывается, что полная σ-мера квазикомпактна в том и только в том случае, если для всякой измеримой вещественной функции f мера μ_f, определенная формулой $\mu_f(E) = \mu(f^{-1}(E))$ на теле тех линейных множеств E, для которых $f^{-1}(E) \in M$, совпадает с пополнением своей части, определенной на теле всех борелевских линейных множеств. Эта теорема показывает, что понятие полной квазикомпактной σ-меры эквивалентно понятию совершенной меры (Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М. — Л., 1949). Далее оказывается, что в классе полных неатомических сепарабельных мер как компактность, так и квазикомпактность эквивалентна изоморфности с обычной мерой Лебега на единичном отрезке (в авторской формулировке этой теоремы упущено условие неатомичности). В заключение доказывается, что всякое произведение квазикомпактных σ-мер обладает квазикомпактным σ-продолжением.

Примечание референта. 1. В последнем параграфе работы имеются неясные места; в частности, неясно утверждение автора, что его последнее предложение обобщает теорему VIII. 2. Автор указывает, что для лебеговской меры μ совпадение меры μ_f с пополнением ее части, определенной на теле борелевских множеств, было установлено Хартманом (Hartman S., Colloq. Math., 1948, **1**, 19—22); следует заметить, что на это совпадение ранее было указано в статье Плеснера и референта (Успехи матем. наук, 1946, **1**, № 1 (11), 180).

В. А. Рохлин

4774. Регулярный асимптотический дифференциал функции многих переменных. Лоджани (Sulla differenziabilità asintotica regolare delle funzione di più variabili. Lodigiani Bruna), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 2, 251—257 (итал.)

Приводится следующее достаточное условие для существования асимптотического дифференциала (называемого автором регулярным асимптотическим дифференциалом) функции трех переменных: Если функция трех переменных, определенная в единичном кубе, обладает всюду частными производными 1-го порядка по всем трем переменным, причем эти производные непрерывны по любой паре переменных, то у нее почти всюду существует асимптотический дифференциал.

Для доказательства строится измеримое множество K_ε меры, как угодно близкой к единице, на котором все частные производные непрерывны. При построении множества K_ε используется результат Стампаккиа (Stampacchia G., Ricerche mat., 1952, **1**, № 1, 27—54).

Р. А. Минлос

4775. О компактности последовательностей действительных функций. Иччи (Sulla compattezza di successioni di funzioni reali. Picci Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 4, 471—476 (итал.)

Функции действительного переменного ставится в соответствие плоское точечное множество — ее график, и проблема компактности последовательности функций трактуется как такая же проблема для последовательности множеств. Вводятся следующие определения:

Если S_r — евклидово пространство r измерений,

$x \in S_r$ и $E \subset S_r$, то $\overline{xE}$ означает расстояние от x до множества E. Нижним пределом последовательности $\{E_n\}$ множеств называется множество точек x, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{xE}_n = 0$, а верхним пределом — множество точек x, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \overline{xE}_n = 0$. В случае совпадения этих пределов последовательность $\{E_n\}$ называется сходящейся (Kuratowski C., Topologie, 1, Warszawa, 1952, 241—245).

Пусть A_n $(n = 1,2,\ldots)$ — множество на прямой, а $f_n(x)$ — действительная функция, определенная на A_n. Если x_0 принадлежит нижнему пределу последовательности $\{A_n\}$ и из $x_n \to x_0$ $(x_n \in A_n)$ следует сходимость последовательности $\{f_n(x_n)\}$, то говорят, что последовательность $\{f_n(x_n)\}$ является вдвойне сходящейся (biconvergente) в точке x_0. Последовательность $\{f_n(x_n)\}$ вдвойне сходится на множестве A, если она вдвойне сходится в каждой точке множества A (привычнее в подобном случае термин «непрерывная» сходимость, введенный для $A_n \equiv A$ Ханом (H. Hahn) в 1921 г.).

Наконец, функции $f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$, $x \in A_n$, называют псевдоравностепенно непрерывными (pseudoequicontinue), если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие положительные числа n_ε и δ_ε, что

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon \text{ для } x, x' \in A_n,\ n > n_\varepsilon,$$
$$|x - x'| < \delta_\varepsilon$$

(в существенном это понятие принадлежит Арцела).

Теорема I. Пусть множества A_n $(n = 1,2,\ldots)$ ограничены в совокупности и последовательность $\{A_n\}$ сходится к A. Если функции $f_n(x)$ равномерно ограничены и псевдоравностепенно непрерывны, то существует подпоследовательность $\{f_{\lambda_n}(x)\}$, вдвойне сходящаяся к непрерывной функции (при $A_n \equiv A$ это предложение сводится к известной теореме Арцела).

Рассмотрим функцию двух переменных

$$R_n(x, x') = \frac{f_n(x) - f_n(x')}{x - x'}$$

на плоском множестве $I_n(\tau_n)$ $(\tau_n > 0)$, для которого $x, x' \in A_n$ и $|x - x'| > \tau_n$.

Теорема II. Пусть (при тех же предположениях относительно A_n) A представляет собой интервал. Если существует такая последовательность чисел $\tau_n \to 0$, что функции $R_n(x, x')$, рассматриваемые на $I_n(\tau_n)$, оказываются равномерно ограниченными, то функции $f_n(x)$ будут псевдоравностепенно непрерывными.

Теорема III. Пусть (при предположениях теоремы II относительно A_n и A) $f_n(x)$ равномерно ограничены и существует такая последовательность чисел $\tau_n \to 0$, что функции $R_n(x, x')$, рассматриваемые на $I_n(\tau_n)$, оказываются псевдоравностепенно непрерывными. Тогда существует подпоследовательность $\{f_{\lambda_n}(x)\}$, вдвойне сходящаяся к некоторой функции, имеющей на A непрерывную производную.

Автор упоминает о предстоящем опубликовании работы, где эти результаты будут обобщены и применены к теоремам существования для дифференциальных уравнений в частных производных.

Г. М. Фихтенгольц

4776. Понятия сверхравномерно ограниченной вариации и абсолютной непрерывности. Дарбо (La nozione di variazione limitata e di assoluta continuità super-uniforme. Darbo Gabriele), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 2, 245—250 (итал.)

Пусть $S = \{f(x)\}$ — класс функций, определенных на $[a, b]$. S называется классом функций со сверхравномерно ограниченной вариацией, если существует такая постоянная M, что

$$\sum_i |f_i(\beta_i) - f_i(\alpha_i)| < M,$$

какова бы ни была конечная система попарно не пересекающихся интервалов (α_i, β_i), содержащихся в $[a, b]$, и какова бы ни была функция $f_i(x)$ из S.

S называется классом сверхравномерно абсолютно непрерывных функций, если $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно не пересекающихся интервалов (α_i, β_i), содержащихся в $[a, b]$ и таких, что $\sum(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, оказывается

$$\sum_i |f_i(\beta_i) - f_i(\alpha_i)| < \varepsilon,$$

какова бы ни была функция $f_i(x)$ из S (Bajada E., Atti. Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, **12**, 163—167). В статье доказано:

1. Необходимым и достаточным условием того, чтобы S был классом функций со сверхравномерно ограниченной вариацией, является существование такой возрастающей функции $W(x)$, что для всех $f(x)$ из S оказывается

$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant W(x + h) - W(x) \quad (h > 0).$$

2. Если все $f(x) \in S$ абсолютно непрерывны и S есть класс функций со сверхравномерно ограниченной вариацией, то S есть класс сверхравномерно абсолютно непрерывных функций.

3. Если последовательность $\{f_n(x)\} \subset L([a, b])$ почти везде сходится к $f(x)$ и если для любой конечной системы попарно не пересекающихся интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a, b]$ оказывается

$$\sum_i \left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f_{n_i}(x)\, dx \right| < M$$

при любых n_i, то $f(x) \subset L([a, b])$ и допустим предельный переход под знаком интеграла.

И. П. Натансон

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

4777. Отделимость и неотделимость B-множеств. Ляпунов А. А., Матем. сб., 1953, **32**(74), № 3, 515—532

Работа посвящена общей трактовке вопроса отделимости и кратной отделимости различных

классов дескриптивной теории множеств. В частности, она содержит доказательства ранее опубликованных автором результатов по тому же вопросу (Докл. АН СССР, 1946, **53**, № 5, 399—402; 1947, **58**, № 9, 1887—1890). Существенно используются обозначения и построения предыдущих работ автора об R-множествах (РЖМат, 1953, 632; 1954, 1598).

Теорема I (II теорема отделимости). Если у двух множеств класса $R_{\mathfrak{Y}}(\Xi)$ (Ξ — тело множеств, над которыми производится операция $R_{\mathfrak{Y}}$) удалить их общую часть, то получатся множества, отделимые друг от друга $CR_{\mathfrak{Y}}(\Xi)$-множествами; при этом предполагается, что операция $R_{\mathfrak{Y}}$ — обыкновенная (последнее требование означает инвариантность класса $R_{\mathfrak{Y}}(\Xi)$ относительно некоторых R-операций, связанных с $R_{\mathfrak{Y}}$).

Теорема II (I теорема отделимости). Два непересекающихся множества класса $R_{\mathfrak{Y}}(\Xi)$ всегда отделимы друг от друга множествами класса $BR_{\mathfrak{Y}}(\Xi)$ (операция $R_{\mathfrak{Y}}$ — обыкновенная).

В частности, отсюда вытекает справедливость I и II теорем отделимости для классов R_α и подклассов $R_{\alpha\beta}$.

По вопросу о кратной отделимости ограничимся следующим предложением.

Пусть класс R_α инвариантен относительно операции Φ_N и последовательность R_α-множеств $\{E_n\}$ такова, что $\Phi_N(\{E_n\}) = 0$, тогда имеются такие BR_α-множества H_n, что $H_n \supset E_n$, $\Phi_N(\{H_n\}) = 0$. В качестве Φ_n можно выбрать любую из операций R^α, R^β или R^β_C ($\beta < \alpha$) или некоторую их итерацию.

Из установленных в реферируемой статье теорем о кратной отделимости получается ряд прежних результатов П. С. Новикова и автора.

Наконец, изучены случаи отсутствия кратной отделимости.

Теорема VI. Существуют такие системы A-множеств $\{\mathcal{E}^1_{n_1,\ldots,n_k}\}$ и $\{\mathcal{E}^2_{n_1,\ldots,n_k}\}$, что

$$\Gamma(\{\mathcal{E}^1_{n_1,\ldots,n_k}\})\,\Gamma(\{\mathcal{E}^2_{n_1,\ldots,n_k}\}) = 0$$

и, каковы бы ни были CA-множества $W^1_{n_1,\ldots,n_k} \supset \mathcal{E}^1_{n_1,\ldots,n_k}$, $W^2_{n_1,\ldots,n_k} \supset \mathcal{E}^2_{n_1,\ldots,n_k}$, непременно

$$\Gamma(\{W^1_{n_1,\ldots,n_k}\})\,\Gamma(\{W^2_{n_1,\ldots,n_k}\}) \neq 0.$$

В формулировке теоремы можно заменить Γ-операцию и A- и CA-множества соответственно на R^α_C-операцию и R_α- и CR_α-множества.

Л. В. Канторович

4778. Проекции в абстрактных множествах. Марчевский, Рылл-Нардзевский (Projections in abstract sets. Marczewski E., Ryll-Nardzewski C.), Fundam. math., 1953, **40**, 160—164 (англ.)

Для данного семейства множеств $\boldsymbol{Q}$ обозначаются, как обычно, через $\boldsymbol{Q}_s$ и $\boldsymbol{Q}_d$ соответственно семейства конечных сумм и произведений множеств, принадлежащих $\boldsymbol{Q}$; через $\boldsymbol{Q}_\sigma$ и $\boldsymbol{Q}_\delta$ — семейства счетных сумм и произведений множеств из $\boldsymbol{Q}$, наконец, через $\boldsymbol{Q}_A$ — семейство множеств, возникающих из множеств семейства $\boldsymbol{Q}$ путем применения A-операции.

Пусть X и Y — два множества, $\boldsymbol{E}$ — класс подмножеств X, $\boldsymbol{F}$ — некоторый класс подмножеств Y, $\boldsymbol{H}$ — класс всех множеств $E \times F$, где $E \in \boldsymbol{E}$, $F \in \boldsymbol{F}$, и, наконец, $P(Z)$ для $Z \subset X \times Y$ — проекция множества Z на X.

Авторы занимаются предложениями типа: Если $Z \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то $P(Z) \in \boldsymbol{E}_\beta$, где α и β суть некоторые индексы s, d, σ, δ, A или пары таких индексов. Отмечается, что в случае $\alpha = s, d, \sigma, \delta, sd\,(= ds)$, δs или $d\sigma$ предложения указанного типа справедливы при $\alpha = \beta$, тогда как уже для $\alpha = s\delta$ невозможно подобрать индекс β так, чтобы соответствующее предложение имело место.

Основной результат этой работы гласит, что в случае, когда семейство $\boldsymbol{F}$ компактно, т. е. когда

для $F_i \in \boldsymbol{F}$ и $\prod_{i=1}^{n} F_i \neq 0$ при $n = 1,2,\ldots$

имеет место $\prod_{i=1}^{\infty} F_i \neq 0$, предложения указанного типа справедливы при $\alpha = s\delta = \beta$, при $\alpha = \sigma\delta$ и $\beta = A$, а также при $\alpha = A = \beta$.

Опечатки: на стр. 160, 1-я строка снизу, вместо $\boldsymbol{H}_{d\sigma}$ должно быть $\boldsymbol{E}_{d\sigma}$; на стр. 163, 14-я строка сверху, должно быть $\boldsymbol{H}_{s\delta}$ вместо $\boldsymbol{H}_{s\sigma}$.

J. Łoś, L. Dubikajtis

4779. Об одном свойстве линейных аналитических множеств (решение одной проблемы Э. Марчевского). Серпинский (Sur une propriété des ensembles analytiques linéaires (solution d'un problème de E. Marczewski). Sierpiński W.), Fundam. math., 1953, **40**, 171 (франц.)

Каждое ограниченное аналитическое множество, расположенное на координатной оси, служит проекцией произведения некоторой последовательности множеств, из которых каждое является суммой конечного числа открытых прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

E. Marczewski

4780. О некоторых вполне упорядоченных монотонных совокупностях множеств. Джонс (On certain well-ordered monotone collections of sets. Jones F. Burton), J. Elisha Mitchel Scient. Soc., 1953, **69**, № 1, 30—34 (англ.)

В теории множеств известна теорема: Если последовательность $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ конечных систем множеств такова, что каждое множество из H_{n+1} есть подмножество некоторого множества из H_n, то существует последовательность $h_1 \supseteq h_2 \supseteq \ldots \supseteq h_n \supseteq \ldots$ множеств такая, что $h_n \in H_n$.

Эта теорема обобщается автором в следующем виде, где $||$ означает мощность множества:

Пусть z — порядковое число и F — вполне упорядоченная последовательность $H_1, H_2, \ldots, H_x, \ldots$, $x < z$, систем попарно непересекающихся множеств такая, что: 1) если подпоследовательность

F' конфинальна F, то $|F'|=|F|$, 2) если подпоследовательность F' не конфинальна F, то $|F'|<|F|$, 3) если $x<y<z$, то каждое множество из H_y есть собственное подмножество некоторого множества из H_x и 4) существует такое кардинальное число $N<|F|$, что для каждого $x<z$ $|H_x|<N$. Тогда существует последовательность множеств $h_1\supseteq h_2\supseteq\ldots\supseteq h_x\supseteq\ldots$ такая, что для каждого $x<z$ $h_x\in H_x$.

Примером показывается, что в условии теоремы неравенство $|H_x|<N$ нельзя заменить неравенством $|H_x|\leqslant N$, сохраняя заключение теоремы. Из этого же примера, путем определения точек и их окрестностей, получается некоторое топологическое неметризуемое пространство. На стр. 31, 8 строка сверху, вместо F должно быть F^*. *Б. С. Содномов*

4781. **О различных суммах трансфинитных рядов типа λ, полученных путем перестановки элементов фиксированного ряда типа λ.** Гинсберг (On the distinct sums of λ-type transfinite series obtained by permuting the elements of a fixed λ-type series. Ginsburg S.), Fundam. math., 1952, **39**, 131—132 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Обозначим через $N\left(\sum_{\xi<\lambda}a_\xi\right)$ число различных сумм рядов типа λ, полученных путем перестановки элементов ряда $\sum a_\xi$; $\aleph_\rho^{\aleph_\rho}=\sum_{\xi<\rho}\aleph_\rho^{\aleph_\xi}$.

Доказываются следующие теоремы, являющиеся обобщением теорем Серпинского (Fundam. math., 1949, **36**, 248—253):

Теорема 1. Если ω_ρ, $\rho>0$ — регулярное порядковое число, то $N\left(\sum_{\xi<\omega_\rho}a_\xi\right)\leqslant\aleph_\rho^{\aleph_\rho}$; далее, если $\omega_\rho=\omega_{\alpha+1}$, то существует ряд типа ω_ρ, $\sum a_\xi$, такой, что $N\left(\sum a_\xi\right)=\aleph_\rho$.

Теорема 2. Если ω_ρ — регулярное порядковое число и $\{a_\xi\}_{\xi<\omega_\rho}$ — неубывающая трансфинитная последовательность порядковых чисел, то $N\left(\sum a_\xi\right)=1$.

Автор получает также следующий результат: если λ есть предельная нерегулярная мощность, то существуют такая возрастающая последовательность $\{a_\xi\}_{\xi<\lambda}$ и ее перестановка $\{b_\xi\}_{\xi<\lambda}$, что $\sum a_\xi<\sum b_\xi$. *A. Wakulicz*

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

4782. **О сильной $(C,1)$-суммируемости рядов по ортогональным многочленам.** Фрёйд (Ortogonális polinomok erös $(C,1)$-szummálhatóságáról. Freud Géza), Magyar tudomán. akad. Mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 4, 507—511 (венг.)

Пусть $\{p_n(x)\}$ — ортонормированная относительно веса $w(x)$ система многочленов на $[a,b]$, причем $p_n(x)$ — многочлен n-й степени с положительным коэффициентом, и пусть $s_n(x)$ — n-я частная сумма ряда Фурье функции $f(x)\in L_w^2[a,b]$ относительно $\{p_n(x)\}$.

Доказываются две основные теоремы:

1. Если для фиксированного $x\in(a,b)$

$$\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu^2(x)=O(n) \tag{1}$$

и

$$\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]^2w(t)\,dt=o(|h|), \tag{2}$$

то при $n\to\infty$

$$(n+1)^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu(x)-f(x)|\to0. \tag{3}$$

При равномерном выполнении условий (1) и (2) на $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ соотношение (3) выполняется равномерно в каждом сегменте интервала (α,β).

2. Если $w(x)>m>0$ на $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, то (1) выполняется равномерно в каждом сегменте интервала (α,β).

Отмечается следующее обобщение теоремы Тандори (Tandori K., Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, 73—82): если на множестве $E\subseteq[a,b]$ выполняется условие (1), то ряд Фурье функции $f(x)$ почти всюду на E сильно суммируем $(C,1)$ к $f(x)$, т. е.

$$(n+1)^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}[s_\nu(x)-f(x)]^2\to0\text{ при }n\to\infty.$$

Приводится аналог теоремы Фейера: Пусть $0<m<w(x)<M$ и $f(x)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$, тогда $(n+1)^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu(x)\to f(x)$ равномерно в каждом сегменте интервала (α,β). *A. A. Конюшков*

4783. **Об одной проблеме Штейнхауса.** Туран (Egy Steinhaus-féle problémáról. Turán Pál-tól), Mat. lapok, 1953, **4**, № 4, 263—275 (венг.)

Проблема Штейнхауса состоит в следующем: Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx \tag{1}$$

имеет неотрицательные частные суммы s_n на $[0,2\pi]$. Следует ли из этого, что: а) $a_n\to0$ при $n\to\infty$ или б) ряд (1) является рядом Фурье суммируемой функции.

Указанные вопросы ставятся и при условии, что неотрицательны на $[0,2\pi]$ только все s_n с достаточно большими n.

Доказывается:

1. Существует ряд (1) с неотрицательными s_n на $[0,2\pi]$, не являющийся рядом Фурье функции из $L^2[0,2\pi]$.

2. Если $^1/_2 < \alpha < 1$ и, кроме того, $\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2} > 2\pi^{\alpha-1}$, то существует ряд (1), у которого все s_n с достаточно большими n неотрицательны на $[0,2\pi]$ и который не является рядом Фурье функции из $L^{1/\alpha}[0,2\pi]$. *А. А. Конюшков*

4784. О некоторых линейных операциях, переводящих периодические функции в тригонометрические полиномы. Берман Д. Л., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 2, 213—216

Рассматривается линейная операция $U_{n,m}$ из E_1 в E_2, обладающая свойствами: 1) для каждой $f \in E_1$ $U_{n,m}(f)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n+m$; 2) если T—тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, то

$$U_{n,m}(T;x) = \int_0^{2\pi} T(x+t)\,\Phi(t)\,dt,$$

где $\Phi(t)$ — заданный тригонометрический полином порядка $n+m$ (относительно определения пространств E_1, E_2 и принятых автором обозначений см. РЖМат, 1953, 166).

Простейшей операцией подобного рода является операция

$$\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f;x) = \int_0^{2\pi} f(x+t)\,\Phi(t)\,dt.$$

Доказываются следующие теоремы:

1. Для любой $f \in E_1$ можно указать множество M, состоящее, по крайней мере, из $2n+2$ точек интервала $[0,2\pi)$, такое, что для любой точки $x \in M$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [U_{n,m}(f_t;x)]_{-t}\,dt = \sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f;x). \qquad (1)$$

2. Если $f \in E_1$ обладает тем свойством, что ее коэффициенты Фурье a_k, b_k равны нулю при $n+1 \leqslant k \leqslant n+m$, то равенство (1) справедливо при любом x.

3. Если X означает множество функций, обладающих свойством, указанным в теореме 2, и таких, что $\|f\|_{E_1} \leqslant 1$, то

$$\sup_{f\in X}\|U_{n,m}(f)\|_{E_2} \geqslant \sup_{f\in X}\|\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f)\|_{E_2}.$$

4. Если операция $U_{n,m}$ оставляет неизменными тригонометрические полиномы порядка $\leqslant n$, то

$$\|U_{n,m}\| \geqslant \sup_{f\in X}\|\sigma_{n,m}(f)\|_{E_2},$$

где $\sigma_{n,m}$ означает операцию Валле-Пуссена.

Далее без доказательства (со ссылкой на результаты С. Б. Стечкина, Докл. АН СССР, 1951, 80, № 4, 545—548) приводится теорема:

5. Если операция $U_{n,m}$ из $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$ оставляет неизменными тригонометрические полиномы порядка $\leqslant n$, то (при $m < n$)

$$\|U_{n,m}\| \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+m+1}{m+1} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\ln\nu}{4\nu^2-1} + \frac{4}{\pi^2}(3\ln 2+\gamma) - \frac{m+2}{2n+m+1}\ln\frac{n+m+1}{m+1} + O\left(\frac{m+1}{n+m+1}\right). \qquad (2)$$

Указывается, что неравенство (2) позволяет определить (при $m < n$) неулучшаемое значение константы A в общей оценке нормы операции $U_{n,m}$:

$$\|U_{n,m}\| \geqslant A\ln\frac{n+m}{m+1},$$

полученной ранее референтом (Докл. АН СССР, 1949, 68, № 1, 9—11). *В. Ф. Николаев*

4785. Об одном новом классе почти периодических функций. Досс (Sur une nouvelle classe de fonctions presque-périodiques. Doss Raouf), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 3, 317—318 (франц.)

Обобщается известное условие (W) Вейля, которому удовлетворяет периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π и интегрируемая (R).

Условие (W). Для каждого $\varepsilon > 0$ и числа ξ ($\xi/2\pi$ иррациональное) можно подобрать натуральное n такое, что

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f(x+\xi l) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

при любом x.

Пусть теперь $f(x)$ периодическая с периодом 2π и ограниченная.

Условие $(2\pi, R)$ (обобщение (W)).

Для каждого $\varepsilon > 0$ и числа ξ ($\xi/2\pi$ иррациональное) можно подобрать натуральное n, $\delta > 0$ и M такие, что

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f(x_l+\xi l) - M\right| < \varepsilon,$$

если $|x_i - x_j| \leqslant \delta \pmod{2\pi}$ $(i,j = 0,1,\ldots,n-1)$.

Утверждается, что условие $(2\pi, R)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $f(x)$ была интегрируема (R), и в этом случае $M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. Обобщая далее условие $(2\pi, R)$, автор приходит к новому определению почти периодичности.

Определение. Действительная ограниченная функция $f(x)(-\infty < x < +\infty)$ называется почти периодической (R) (пп R), если для каждого $\varepsilon > 0$ и числа ξ ($\xi/2\pi$ иррациональное) можно подобрать натуральное число n, $\delta > 0$, числа $\pi_k > 0$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ и M такие, что

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f(x_l+l\xi) - M\right| < \varepsilon,$$

если

$$|x_i - x_j| \leqslant \delta \pmod{\pi_k} \quad (i, j = 0,1,\ldots,n-1).$$

Автор утверждает справедливость следующей теоремы аппроксимации:

Для того чтобы $f(x)$ была $\operatorname{пп} R$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было построить два (почти периодических) тригонометрических полинома $p(x)$ и $q(x)$ таких, что

$$q(x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$$

и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [p(x) - q(x)]\, dx < \varepsilon.$$

А. С. Кованько

4786. О функциях Лебега лагранжевой интерполяции. Фрёйд (Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation. Freud Géza), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, 4, № 1—2, 137—142 (нем.)

Пусть $[a, b]$ — конечный сегмент, $w(x) \not\equiv 0$ — неотрицательная, суммируемая на $[a, b]$ функция, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность полиномов порядка соответственно n, ортогональных с весом $w(x)$ на $[a, b]$, и пусть $x_{1n}, \ldots, x_{nn} (n = 1,2,\ldots)$ — нули полинома $P_n(x)$. Если $f(x)$ — конечная функция на $[a, b]$, то интерполяционный полином Лагранжа порядка $\leqslant n-1$, совпадающий с $f(x)$ в точках $x_{1n}, \ldots, x_{nn}$, имеет вид $L_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{kn}) l_{kn}(x)$, где $l_{kn}(x)$—так называемые фундаментальные полиномы лагранжевой интерполяции. Функции $\Lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \; (n = 1,2,\ldots)$ называются функциями Лебега, соответствующими матрице интерполяционных узлов x_{kn}.

Теорема. Пусть $[c, d] \subseteq [a, b]$ и существуют числа m, M, K такие, что $0 < m \leqslant w(x) \leqslant M$ и $|P_n(x)| \leqslant K$ при $c \leqslant x \leqslant d$ и $n = 1,2,\ldots$ Тогда: 1) на всяком сегменте интервала (c, d) имеем $\Lambda_n(x) = O(\log n)$ равномерно относительно x; 2) если $f(x)$ удовлетворяет на $[c, d]$ условию Дини—Липшица $|f(x_2) - f(x_1)| = o(|\log|x_2 - x_1||^{-1})$, то на всяком сегменте интервала (c, d) имеем $\lim_{n\to\infty} L_n(f; x) = f(x)$ равномерно относительно x.

С. М. Ловинский

4787. О полиномах формы С. Н. Бернштейна для функций двух переменных. Киприянов И. А., Уч. зап. Казанского ун-та, 1953, 113, № 10, 193—207

Л. В. Канторовичем (Докл. АН СССР, 1930, № 21, 563—566; Матем. сб., 1934, 41, № 3, 507—510) были построены два обобщения многочленов С. Н. Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

состоящие в том, что множители $f(k/n)$ заменяются на средние (в том или ином смысле) значения $f(x)$ на малом отрезке, содержащем точку k/n. Эти многочлены сходятся к функции $f(x)$ не только тогда, когда последняя непрерывна, но и в более широком классе случаев. Результаты Л. В. Канторовича были дополнены Г. Лоренцом (Lorentz G., Матем. сб., 1937, 2(44), № 3, 543—556), рассмотревшим вопрос о сходимости обобщенных многочленов С. Н. Бернштейна в среднем.

В реферируемой статье делается попытка переноса указанных результатов на двумерный случай. Такой перенос возможен, но рассуждения автора лишены доказательной силы. Вот некоторые из допущенных им погрешностей:

1) неверно, что всякий полином степени $n+m$ представим в форме (1) статьи;

2) при определении ядра не сказано, является ли параметр $k > 1$ произвольным или некоторым определенным числом; в общем случае это не безразлично;

3) лемма 3 очевидна, но соображения, приводимые в качестве ее доказательства, непонятны;

4) следствие этой леммы не связано с ней; без оговорки $h > 0$, $k > 0$ оно очевидно, а с ней—неверно;

5) лемма 4 неверна. *И. П. Натансон*

4788. Некоторые новые теоремы о замкнутости. Мандельбройт (Quelques nouveaux théorèmes de fermeture. Mandelbrojt S.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 241—251 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Последовательности положительных чисел $\{M_n\}$ ставится в соответствие класс $L\{M_n\}$ бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих неравенствам

$$\int |f^{(n)}(x)|\, dx \leqslant M_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Рассматривается вопрос о возможности приблизить в $L(-\infty, \infty)$ функцию $f \in L\{M_n\}$ линейными комбинациями вида

$$\sum_{n=0}^{m} \{a_n f^{(\nu_n)}(x) + b_n g(x + \xi_n)\}, \tag{1}$$

где $\{\nu_n\}$—некоторая заданная последовательность целых положительных чисел, а $g(x)$—данная функция из $L(-\infty, \infty)$.

В прежних работах автора этот вопрос исследован при $\nu_n = n$ (Mandelbrojt S., J. analyse math., 1951, 1, 180; General theorems of closure, Monogr. in math., The Rice Institute Pamphlet, 1951, 38).

Вводятся следующие понятия и обозначения:

а) $N(t) = \sum_{\nu_n < t} 1$, $D(t) = N(t)/t$, $D_0(t) = \inf_{x \geqslant t} D(x)$,

$$D_0 = \lim_{t\to\infty} D_0(t).$$

б) Последовательности $\{M_n\}$ ставится в соответ-

ствие функция $C(\sigma)$ $(\sigma > 0)$

$$C(\sigma) = \sup_{n \geqslant 0} (n\sigma - \ln M_n).$$

в) $\Omega(f)$ и $\Omega(g)$—множества нулей преобразований Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$,

$$E = E(f, g) = \Omega(g) \cap \overline{C\,\Omega(f)},$$

$\underset{h}{E}(f, g)$ — сумма сегментов: $\underset{h}{E} = \bigcup_{x \in E} [xe^{-h}, xe^{h}]$,

$\varphi(x) = \varphi_{f,g,h}(x)$ — характеристическая функция множества $\underset{h}{C}E$.

г) V_1—класс функций ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$, ограниченных сверху и снизу положительными числами.

V_2—класс функций $u(x)$, ограниченных сверху и снизу положительными числами, имеющих непрерывную производную $u'(x)$, такую, что $x\,u'(x)$ ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$ и $\int |x|[u'(x)]^2 dx < \infty$.

Основной результат статьи следующий.

Пусть $D_0 > \frac{1}{2}$ и $h > 1 - D_0$,

$$f \in L\{M_n\},\ g \in L.$$

Если существует функция $u(x)$, принадлежащая к какому-нибудь из классов V_1 или V_2, такая, что при $x \in \underset{h}{E}$ или $-x \in \underset{h}{E}$

$$u(x) < \varphi(x) + D_0[C(\ln|x|)] - \frac{1}{2}$$

и, кроме того,

$$\int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{d\tau}{u(e^{\tau}) + u(-e^{\tau})}}\, d\sigma = \infty,$$

то, при любой постоянной a, функция $f(x+a)$ может быть произвольно точно приближена в $L(-\infty, \infty)$ линейными комбинациями вида (1).

Пусть $E = PE + RE$, где PE — совершенное множество, а RE — счетное. Если $RE \subset \Omega(f)$, то в формулировке главной теоремы можно множество E заменить на $E_1 = E \cap C(RE)$.

Автор отмечает, что метод, развитый в статье, позволяет обобщить некоторые его результаты (см. цитированные работы), относящиеся к вопросам приближения полиномами с весом на замкнутом множестве E функций, непрерывных на всей оси, а также результаты, относящиеся к теоремам единственности решения проблемы моментов с дополнительным требованием принадлежности точек роста функции обложения $\sigma(t)$ данному множеству E. Сущность обобщений состоит в том, что вместо системы всех степеней x^n рассматривается система $\{x^{\nu_n}\}$, где $\{\nu_n\}$—некоторая последовательность целых положительных чисел. *Б. Я. Левин*

4789. О равномерной сходимости некоторых рядов. Гальярдо (Sulla convergenza uniforme di alcune serie. Gagliardo Emilio), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 2, 173—177 (итал.)

Геометрически доказывается следующий результат. Пусть последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ такова, что $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ монотонно стремится к $q > 0$. Тогда на всяком сегменте, содержащемся в интервале $(0, 2\pi/q)$, суммы $\sum_{k=1}^{n} \exp(i\lambda_k x)$ равномерно ограничены по n и x. Отсюда, при том же условии на $\{\lambda_n\}$, выводится теорема:

Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < +\infty.$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(i\lambda_n x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \exp(i\lambda_n x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x),$$

где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра, равномерно сходятся на всяком сегменте, содержащемся соответственно в интервалах $(0, 2\pi/q)$, $(0, \pi/q)$, $(-1, 1)$. Эти результаты связаны с распределением особенностей рядов Дирихле. *Ф. В. Широков*

См. также: 4720, 4751, 4764, 4829, 4832, 4838 К, 4843, 4855

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4790. О равномерной, но не абсолютной сходимости степенного ряда с пропусками. Эрдёш (On the uniform but not absolute convergence of power series with gaps. Erdös P.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon math.), 1952, 25, 162—168 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Известно, что существует степенной ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$, равномерно сходящийся в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$, т. е. сходящийся в этом замкнутом круге равномерно, но не абсолютно.

Ясно, что не для всякой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ такой ряд будет существовать. Так, если $n_{k+1} > \lambda n_k$, $\lambda > 1$, $k = 1, 2, \ldots$, то из сходимости ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ всюду на окружности $|z|=1$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ (Zygmund A., Studia Math., 1931, 3, 77—91).

В реферируемой работе автор, пользуясь методами теории вероятностей, доказывает, что если монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ удовлетворяет условию $\lim (n_j - n_i)^{1/j-i} = 1$, где $j - i \to \infty$, в частности, условию $\lim_{k\to\infty} n_k^{1/k} = 1$, то существует степенной ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$, сходящийся равномерно в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, и такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$.

Н. А. Давыдов

4791. Приложение теории открытых отображений к исследованию аналитических функций. Полак А. И., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 2, 187—188

Изучаются некоторые особенности в поведении аналитических функций, связанные со структурой открытых отображений компактных пространств.

Пусть G — плоская область, F — компакт, $F \subset G$, f — функция, аналитическая в G, причем $f(z) \overline{\in} f(F)$ для $z \in G \setminus F$. В теореме 1 автор доказывает, что для того, чтобы функция f каждое свое значение принимала на множестве F не более чем n раз, необходимо и достаточно, чтобы f принимала не более n раз каждое значение из некоторого счетного множества M, плотного на множестве $F' = f(F)$.

Даются идеи доказательства двух теорем, в одной из которых (теорема 3) формулируются достаточные условия для того, чтобы при некотором фиксированном $d > 0$ для любых двух $z_1 \in F$ и $z_2 \in F$ таких, что $f(z_1) = f(z_2)$, имело место $|z_1 - z_2| \leqslant d$, в другой (теорема 4) — для случая, когда F — локально связный континуум и отображение, осуществляемое f не взаимно однозначно на F, утверждается возможность удаления из F открытого непустого множества без потери точек в образе $f(F)$.

Формулировка последней теоремы не вполне точна: предпосылки теоремы автора, на которую имеется ссылка в статье, должны быть сформулированы и в реферируемой теореме (в реферате приведена уточненная формулировка). Из теоремы 1 выводится следствие (теорема 2) для случая, когда F — замкнутая область. *Л. Д. Кудрявцев*

4792. Об обобщениях шварцевого отображения многоугольника. Ленц (Über Verallgemeinerungen der Schwarzschen Polygonabbildung. Lenz Hanfried), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss., 1952, 13—29 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Автор обобщает результат Шварца о конформном отображении односвязных многоугольников, прямолинейных или круговых, на более общие области, особенно на многосвязные многоугольники.

Для каждой функции, отображающей полуповерхность Римана на многоугольник, выполняется дифференциальное уравнение третьего порядка. Порядок уравнения может понижаться при специальных конфигурациях. С учетом этой классификации перечислены различные случаи.

Y. Komatu

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 11, 1076

4793. Теория коэффициентов целых функций с главной экспоненциальной частью. Вильсон (The coefficient theory of integral functions with dominant exponential parts. Wilson R.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 14, 142—149 (англ.)

Рассматриваются целые функции конечной степени, для которых преобразование Лапласа дает функцию, имеющую лишь полюсы и не более одной существенно особой точки. Эти функции, очевидно, представляются в форме

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{q} \left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} A_{\mu\nu} z^{\mu-1} \right) e^{\alpha_\nu z} + F^*(z),$$

где $F^*(z)$ имеет меньший тип, чем первая сумма. Используя известные результаты Адамара о мероморфных функциях, автор дает правило для определения чисел α_ν и $A_{\mu\nu}$ по коэффициентам степенного разложения $F(z)$. Аналогичное правило формулируется для целых функций произвольного порядка ρ и нормального типа, причем роль $e^{\alpha z}$ играет функция Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(\alpha z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n z^n}{\Gamma(n\sigma + \sigma)}.$$

Б. Я. Левин

4794. О существенно особых точках аналитических множеств. Реммерт, Штейн (Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Remmert Reinhold, Stein Karl), Math. Ann., 1953, 126, № 4, 263—306 (нем.)

Множество $\mathfrak{M}$ точек области G пространства C^n n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$ называется аналитическим в точке $P \in G$, если существуют окрестность $U(P)$ и система регулярных в $U(P)$ функций $f_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, f_\sigma(z_1, \ldots, z_n)$ таких, что множество $\mathfrak{M} \cap U(P)$ состоит из их общих нулей. Множество $\mathfrak{M}$ называется аналитическим в области G, если оно будет аналитическим в каждой ее точке. Обозначают его через $\mathfrak{M}_G$.

Аналитическое в области G множество $\mathfrak{M}_G$ называется приводимым (reduzibel) в этой области, если существуют два непустых, отличных от $\mathfrak{M}_G$, аналитических множества $\mathfrak{M}'_G$ и $\mathfrak{M}''_G$, соединение которых равно $\mathfrak{M}_G$. В противном случае множество $\mathfrak{M}_G$ называется неприводимым (irreduzibel) в области G.

Размерность аналитического множества $\mathfrak{M}_G$ в

точке $P \in G$, обозначаемая через $\dim_P(\mathfrak{M}_G)$, определяется следующим образом: если $P \notin \mathfrak{M}_G$, то $\dim_P(\mathfrak{M}_G) = -1$; если $P \in \mathfrak{M}_G$, то рассматривается совокупность всех аналитических плоскостей пространства C^n, имеющих в окрестности точки P только одну общую точку с $\mathfrak{M}_G$, именно точку P. Если k — максимальная размерность всех этих плоскостей, то $\dim_P(\mathfrak{M}_G) = n - k$. Размерность множества $\mathfrak{M}_G$ определяется равенством

$$\dim(\mathfrak{M}_G) = \max_{P \in G}(\dim_P(\mathfrak{M}_G)).$$

Если множество $\mathfrak{M}_G$ в каждой точке $P \in \mathfrak{M}_G$ имеет одну и ту же размерность, то оно называется однородно-размерным (rein-dimensional) в области G.

Понимая под продолжением аналитического в области G множества $\mathfrak{M}_G$ на область $\widetilde{G} \supset G$ множество $\mathfrak{M}_{\widetilde{G}}$, аналитическое в области $\widetilde{G}$ и такое, что $\mathfrak{M}_{\widetilde{G}} \cap G = \mathfrak{M}_G$, граничную точку P области G называют регулярной относительно множества $\mathfrak{M}_G$, если существуют окрестность $U(P)$ и продолжение множества $\mathfrak{M}_G$ на область $G \cap U(P)$. В противном случае точка P называется существенно особой граничной точкой множества $\mathfrak{M}_G$.

После изучения локальных и общих свойств аналитических множеств и их размерности авторы доказывают основной результат своей работы — следующую теорему:

Пусть $\mathfrak{F}^k$ $(k < n)$ — однородное, размерности k, аналитическое множество в области G пространства C^n. Пусть далее $\mathfrak{M}^k$ — однородное, размерности k, аналитическое множество в $G \setminus \mathfrak{F}^k$. Если на каждой неприводимой компоненте множества $\mathfrak{F}^k$ существует по крайней мере одна точка, не принадлежащая никакой другой неприводимой компоненте $\mathfrak{F}^k$ и являющаяся существенно особой граничной точкой множества $\mathfrak{M}^k$, то каждая точка $\mathfrak{F}^k$ будет существенно особой граничной точкой $\mathfrak{M}^k$. Если же на каждой неприводимой компоненте множества $\mathfrak{F}^k$ существует по крайней мере одна точка, регулярная относительно $\mathfrak{M}^k$, то замкнутая оболочка множества $\mathfrak{M}^k$ в области G будет в ней однородным, размерности k, аналитическим множеством.

Из этой теоремы, в частности, следует, что аналитическое множество без нульмерных компонент не имеет изолированных существенно особых точек. Аналогичное предложение для случая $k = n-1$ было ранее доказано Тулленом (Behnke H., Thullen P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Springer, Berlin, 1934, 1—115).

А. В. Лебедев

4795. Комплексные аналитические многообразия без счетной базы. Калаби, Розенлихт (Complex analytic manifolds without countable base. Calabi Eugenio, Rosenlicht Maxwell), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 3, 335—340 (англ.)

Приведено построение комплексных аналитических многообразий без счетной базы, имеющих произвольную комплексную размерность.

Пусть E_t $(-\infty < t < \infty)$ — евклидова плоскость с координатами (x_t, y_t). Тогда множество эквивалентных классов, определяемых соотношением $(x_s, y_s) \sim (x_t, y_t)$, если: 1) $y_s = y_t$ и 2) $x_s y_s + s = x_t y_t + t$ для $y_s = y_t > 0$ и $s = t$, $x_s = x_t$ для $y_s = y_t \leqslant 0$, с топологией, естественно индуцируемой топологией E_t, образует двумерное многообразие S_+ без счетной базы (несколько видоизмененный пример Прюфера).

Если соотношение $(x_s, y_s) \sim (x_t, y_t)$ определять условиями: 1) $y_s = y_t$ и 2) $x_s y_s + s = x_t y_t + t$ для $s \neq t$ и $x_s = x_t$ для $s = t$, то получается другое двумерное многообразие S без счетной базы. Если в последнем построении вместо действительных значений t, x_t, y_t брать произвольные комплексные значения, то получается четырехмерное многообразие M без счетной базы.

В реферируемой работе изучаются некоторые топологические свойства многообразий S_+, S, M; так, например, доказывается, что все они неметризуемы и что группы $\pi^1(S)$, $\pi^2(M)$ несчетны. Выясняется также, что построение многообразия M эквивалентно частному случаю более общего построения подобных многообразий, основанного на рассмотрении несчетного числа неприводимых неособых алгебраических многообразий комплексной размерности n, связанных между собою определенными бирациональными преобразованиями.

Л. И. Волковыский

4796. О вычетах полигенных функций. Пур (On residues of polygenic functions. Poor Vincent C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 2, 244—255 (англ.)

Однозначная функция $f(z)$ комплексного переменного называется полигенной, если ее производная по z в точке зависит от направления приближения к точке. В работе доказываются следующие теоремы. 1. Если $f(z)$ имеет в каждой точке области D дифференциал $df = f_x dx + f_y dy$, то для того, чтобы интеграл $\int_C f(z)\,dz$ по каждой замкнутой спрямляемой кривой C, ограничивающей площадь σ в области D, существовал и был конечен, необходимо и достаточно, чтобы производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \lim_{\Delta\sigma_1 \to 0} \frac{1}{2i\Delta\sigma_1} \int_C f(z)\,dz$ существовала и была конечна в каждой точке D. 2. Если $f(z)$ имеет дифференциал $df = f_x dx + f_y dy$, то для того, чтобы интеграл $\int_C f(z)\,\overline{dz}$ существовал и был конечен по каждой замкнутой спрямляемой кривой C, ограничивающей площадь σ в области D, необходимо и достаточно, чтобы производная

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \lim_{\Delta\sigma_1 \to 0} \frac{-1}{2i\Delta\sigma_1} \int_C f(z)\,d\bar{z}$$

существовала и была конечна в каждой точке области D. Автор обобщает понятие вычета для

голоморфных функций и строит два новых типа вычетов полигенных функций при помощи формул

$$R' = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz - \frac{1}{\pi}\int_\sigma \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\sigma;$$

$$\overline{R}' = \frac{-1}{2\pi i}\int_C f(z)\,d\bar{z} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial f}{\partial \beta}\,d\sigma.$$

Из первой теоремы следует, что если $f(z)$ непрерывна в D и производная $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ существует и конечна в D, то вычет $R' = 0$. Из второй теоремы при непрерывности $f(z)$ и существовании и конечности производной $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ следует, что вычет $\overline{R}' = 0$.

Приводятся примеры вычисления вычетов функций $f(z)(az + b\bar{z})^{-1}$ и $f(z)(az^2 + bz\bar{z} + c\bar{z}^2)^{-1}$, где $f(z)$ «регулярна», т. е. имеет ограниченный дифференциал Гамильтона. *Б. Н. Рахманов*

4797. К теории функций многих комплексных переменных. Аналитическая проекция. Кох (Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die analytische Projektion. Koch Karl, Dissertationen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster in Referaten. Heft 3, S. 8—9. Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster, 1953) (нем.)

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 25.

4798. Приближение регулярных функций многих переменных в комплексных многообразиях. Вилль (Approximation regulärer Funktionen mehrerer Veränderlichen in komplexen Mannigfaltigkeiten. Will Herbert, Dissertationen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster in Referaten, Heft 3, S, 5—7, Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster, 1953) (нем.)

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 25.

4799 К. Введение в теорию функций комплексного переменного. Трон (Introduction to the theory of functions of a complex variable. Thron Wolfgang, J. X+230 pp., John Wiley and Sons., Inc., N. Y., Chapman and Hall, Ltd, L., 1953, 6. 50 doll.) (англ.)

В этой книге, предназначенной для студентов и не содержащей никаких новых результатов, автор излагает классическую теорию аналитических функций.

Он вводит сначала (§§ 1—14) определения и результаты, используемые в этой теории, а именно, элементы общей топологии, понятие числа, непрерывные и дифференцируемые функции, плоские кривые и понятия из комбинаторной топологии (дается доказательство теоремы Жордана). Собственно говоря, теория аналитических функций начинается с интегрирования в комплексной области и теоремы Коши $\int_C f(z)dz = 0$ (которая дана только в случае, когда f голоморфна на C). Затем идет изучение последовательностей функций и бесконечных рядов, за этим следуют общие рассмотрения в функциональных пространствах. В заключение несколько бегло изложены основные принципы теории (аналитическое продолжение, принцип симметрии, конформное отображение, эллиптические и модулярные функции, римановы поверхности).

Можно упрекнуть автора в том, что в книге не выделены некоторые важные моменты и введены понятия как, например, трансфинитные числа, несущественные для теории. Забота о том, чтобы ничего не предполагать известным и не отсылать к другим книгам, является причиной того, что автор слишком много места отвел предварительным сведениям; наконец, принятая довольно абстрактная точка зрения (например, для римановых поверхностей) оставляет мало места приложениям, сближающим учащихся с усвоенными понятиями. Но и в таком виде эта книга может оказать помощь тем, что преподает со всей строгостью теорию функций комплексного переменного. *J. Lelong-Ferrand*

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 9, 857

См. также: 4715, 4717, 4789, 4810, 4812Д, 4847

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4800. Некоторые новые случаи решения системы двух линейных дифференциальных уравнений в конечном виде. Федоров Г. Ф., Вестн. Ленигр. ун-та, 1953, № 11, 57—65

Рассматривается система второго порядка

$$\frac{dY}{dx} = Y(U_0\varphi_0 + U_1\varphi_1 + U_2\varphi_2), \qquad (1)$$

где U_j $(j = 0, 1, 2)$ — матрицы, следы и определители которых равны нулю, а φ_j — скалярные функции от x.

Целью работы является нахождение таких соотношений между коэффициентами этой системы, при которых последняя допускает интегрирование в конечном виде.

Если через $\sigma_{i\ldots k}$ обозначить след матрицы $U_i \ldots U_k$, то первая группа таких условий требует выполнения одного из трех равенств вида

$$\varphi_0\sigma_{01} + \sigma_{12}\varphi_2 = 0 \qquad (2)$$

(два других получаются из (2) циклической перестановкой индексов). При этом в случае выполнения (2) фундаментальная матрица системы (1) имеет вид

$$Y(x) = \exp\left[(U_0U_1 - U_1U_0)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sigma_{012}}{\sigma_{01}^2}\int_{x_0}^{x}\varphi_2\,dx + U_1\psi\right],$$

где $\psi(x)$ есть некоторая скалярная функция, выражение которой дается явно. Приводятся и другие случаи интегрируемости.

При доказательстве полученных результатов автор пользуется рядом свойств матриц, следы и определители которых равны нулю. Эти свойства подробно изложены в начале заметки.

Г. Л. Мивернюк

4801. Замечание о контактных преобразованиях. Блок (A note on contact transformations. Block H. D.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 207—208 (англ.)

Контактное преобразование переменных p_i, q_i в переменные $\bar{p}_i$, $\bar{q}_i$ характеризуется равенством

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{p}_i\, d\bar{q}_i - p_i dq_i) = dF, \qquad (1)$$

которое автор считает эквивалентным системе уравнений

$$\bar{p}_i = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}_i}, \quad p_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Существуют четыре типа контактных преобразований, получающихся по аналогичным схемам. Если обозначить преобразование (2) через $(\bar{q}q)$, то остальные будут $(\bar{q}p)$, $(\bar{p}q)$, (pp).

Утверждается, что существуют контактные преобразования, которые нельзя получить ни по одной из этих схем. В подтверждение приводятся два простых примера. Первый пример:

$$\bar{q}_1 = q_1, \quad \bar{q}_2 = p_2, \quad \bar{p}_1 = p_1, \quad \bar{p}_2 = -q_2. \qquad (3)$$

Здесь $F = -\bar{q}_2 q_2$. Следовательно, формулами (2) преобразование (3) определить нельзя. Во втором примере имеет место то же явление.

Никаких объяснений факту существования контактных преобразований, не укладывающихся в указанные четыре схемы, в работе не содержится (автор пишет: «Эта заметка имеет целью рассеять довольно часто встречающееся неправильное представление посредством элементарного примера»). Заметка была представлена в качестве доклада годичному собранию Американского математического общества 1952 г. (РЖМат, 1954, 1518).

Примечание референта. Контактные преобразования можно задавать не только в форме (2) или трех других, аналогичных. Группа контактных преобразований является подгруппой канонических преобразований ранга, большего нуля (Аржаных И. С., Тр. Ин-та матем. и механики АН УзССР, 1950, № 7, 32—45), а в группе контактных преобразований существует подгруппа расширенных точечных преобразований Матье (Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, М.—Л., 1937, 333—334). Подгруппа Матье определяется равенством

$$\sum_{k=1}^{m} (\bar{p}_k d\bar{q}_k - p_k dq_k) = 0.$$

В примерах автора происходит наложение подгруппы Матье и обычного контактного преобразования, т. е. имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m} (\bar{p}_k d\bar{q}_k - p_k dq_k) + \sum_{j=m+1}^{n} (\bar{p}_j d\bar{q}_j - p_j dq_j) = dF,$$

причем

$$F = F(\bar{q}_{m+1}, \ldots, \bar{q}_n;\ q_{m+1}, \ldots, q_n).$$

И. С. Аржаных

4802. Об одной теореме Кнезера. Лоясевич (Sur un théorème de Kneser. Lojasiewicz S.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1953, **24**, № 2, 148—152 (франц.)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, y) \qquad \dot{y} = g(t, x, y), \qquad (1)$$

с непрерывными функциями f и g, для которой всякое ее решение, проходящее через точку $p_0 = (t_0, x_0, y_0)$, определено в интервале $< t, c >$. В таком случае, как показал Кнезер, пересечение плоскости $t = c$ с областью эмиссии точки p_0 относительно уравнения (1) является континуумом K. Автор (решая вопрос, поставленный Т. Важевским) показывает, что если система (1) обладает свойством единственности влево, то континуум K односвязен.

Кроме того, показывается (теорема II), что если заданы точка p_0 и односвязный континуум K, лежащие в плоскости $t = c\,(c > t_0)$, то существуют функции f, g, непрерывные во всем пространстве t, x, y, такие, что область эмиссии p_0 относительно (1) имеет в пересечении с плоскостью $t = c$ континуум K. Этот второй результат, как упоминает автор, известен (Бокштейн М. Ф., Уч. зап. Моск. ун-та, 1939, **15**, 3—72). *K. Tatarkiewicz*

4803. Об оценке числа существенных параметров, от которых зависит семейство интегральных кривых системы дифференциальных уравнений, обладающих некоторым асимптотическим свойством. Важевский Т., Бюлл. Польской акад. наук, Отд. 3, 1953, **1**, № 1—2, 3—5

Рассматривается система дифференциальных уравнений, записанная в векторной форме

$$X' = f(t, X, Y), \quad Y' = g(t, X, Y), \qquad (1)$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$, причем вектор-функции $f(t, X, Y)$ и $g(t, X, Y)$ непрерывны для всех X, Y и $t \in (a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ и обеспечивают единственность решения задачи Коши. В пространстве (t, X, Y) при помощи неравенств

$$|X - L(t)| < l(t) > 0, \quad |Y - M(t)| \leqslant m(t) > 0$$

$$(t \in (a, b))$$

определяется трубка T. Здесь $L(t)$ и $M(t)$ — вектор-функции, а $l(t)$ и $m(t)$ — скалярные функции, непрерывно дифференцируемые на (a, b).

Рассмотрим следующие подмножества трубки T:

$|X - L(t)| = l(t)$, $|Y - M(t)| \leqslant m(t)$ (грань $\bar{E}$),

$|X - L(t)| \leqslant l(t)$, $|Y - M(t)| = m(t)$ (грань $\bar{S}$).

Теорема. Пусть $[X - L(t)]\,[f(t, X, Y) - L'(t)] <$

$< l'(t)\, l(t)$ на $\overline{E}$ и $[Y - M(t)][g(t, X, Y) - M'(t)] > > m'(t)\, m(t)$ на $\overline{S}$.

Тогда размерность множества точек (t_0, X, Y), через которые проходят интегральные кривые системы (1), принадлежащие при всех $t \in (b, t_0]$ трубке T, не менее p. *Д. М. Гробман*

4804. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений. Баутин Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 1, 128

Рассматривается вопрос о существовании предельных циклов среди решений системы

$$\frac{dx}{dt} = x(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y) = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = y(b_{00} + b_{10}x + b_{01}y) = Q(x, y)$$

при условии

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{10}, & a_{01} \\ b_{10}, & b_{01} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Используется замечание о том, что замкнутый контур, составленный из траекторий, всегда пересекает кривую

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x}[B(x, y)\, P(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y}[B(x, y) Q(x, y)] = 0,$$

где B — произвольная однозначная дифференцируемая функция (см. Dulac Henri, C. r. Acad. sci., 1937, 204, № 23, 1703—1706).

Функция B выбирается в виде $B = x^{k-1} y^{h-1}$, и при соответствующем подборе h и k получается уравнение для кривой $D = 0$ в виде

$$\frac{b_{00}a_{10}(a_{01} - b_{01}) + a_{00}b_{01}(b_{10} - a_{10})}{\Delta} B(x, y) \equiv$$

$$\equiv \frac{\sigma}{\Delta} B(x, y) = 0.$$

Если $\sigma \neq 0$, то кривая $D = 0$ имеет общие точки только с интегральными кривыми $x = 0$ и $y = 0$, и поэтому в конечной части плоскости не существует предельных циклов. В случае $\sigma = 0$ существует область, заполненная замкнутыми траекториями. *М. И. Минкевич*

4805. Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, ассоциированные предельные циклы периодических решений которого являются алгебраическими кривыми. Оби (A non-linear differential equation of the second order with periodic solutions whose associated limit cycles are algebraic curves. Obi Chike), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 3, 356—360 (англ.)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ обладают непрерывными вторыми производными. Штрихи в дальнейшем обозначают дифференцирование по x, точки над буквами — дифференцирование по t. Доказывается теорема:

Пусть a_1, a_2 $(a_2 > a_1)$ — пара чисел таких, что

$$f(a_1) = f(a_2) = 0,$$

$$f'(a_1) > 0, \quad f'(a_2) < 0,$$

$$f(x) > 0 \text{ для } a_1 < x < a_2,$$

$$f(x)\, g^2(x) < 1 \text{ для } a_1 \leqslant x \leqslant a_2.$$

Каждой такой паре чисел соответствует периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} - \left(\frac{3}{2} f'g + fg'\right)\dot{x} - \frac{1}{2} f'(1 - fg^2) = 0, \quad (1)$$

и этому решению на плоскости (x, y), где $y = \dot{x}$, соответствует интегральная кривая

$$y^2 - 2f(x)\, g(x)\, y + f^2(x)\, g^2(x) - f(x) = 0.$$

Метод доказательства — «обобщение» уравнения вида $\ddot{x} + h(x) = 0$, обладающего периодическими решениями.

Рассматривается пример $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \varepsilon x$ $(\varepsilon^2 < 4)$. Уравнение (1) в этом случае обладает сходством с уравнением Ван-дер-Поля. *А. В. Драгилев*

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4806. О некоторой вполне интегрируемой системе уравнений первого порядка в частных производных. Шарский (Sur un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre complétement intégrable. Szarski Jacek), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1953, 24, № 2, 9—16 (франц.)

Автор доказывает существование и однозначность решения системы уравнений

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial x_\alpha} = f_\alpha^\mu\left(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_\mu}{\partial y_n}\right)$$
$$(\mu = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, \ldots k), \quad (1)$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$z_\mu(x_1^0, \ldots, x_k^0, y_1, \ldots, y_n) = \omega_\mu(y_1, \ldots, y_n), \quad (2)$$

в предположении, что функции

$$f_\alpha^\mu(x_1, \ldots, z_m, g_1^\mu, \ldots, g_n^\mu),\ \omega_\mu(y_1, \ldots, y_n)$$

принадлежат к классу C^3 на соответствующих множествах и что система (1) вполне интегрируема, т. е. что функции $f_\alpha^\mu(x_1, \ldots q_n^\mu)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial f_\alpha^\mu}{\partial x_\beta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha^\mu}{\partial q_i^\mu}\frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f_\alpha^\mu}{\partial q_i^\mu}\frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial z_\nu} q_i^\nu + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f_\alpha^\mu}{\partial z_\nu} f_\beta^\nu \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial x_\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial q_i^\mu}\frac{\partial f_\alpha^\mu}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial q_i^\mu}\frac{\partial f_\alpha^\mu}{\partial z_\nu} q_i^\nu +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial f_\beta^\mu}{\partial z_\nu} f_\alpha^\nu. \quad (3)$$

Множество, в котором гарантируется существование единственного решения системы (1) и условий (2), находится эффективно. Оно зависит от количества переменных, областей определения функции f_α и постоянных, мажорирующих их третьи производные. Основная идея доказательства заключается в приведении общей системы (1) к системе (1), но

с $k=1$. Это приведение автор осуществляет при помощи преобразования Майера. Метод автора эффективен и пригоден для получения приближенных решений. *M. Krzyżański*

4807. Собственные значения уравнения $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ в случае, когда граничные условия даются на полубесконечной области. Джонс (The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains. Jones D. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 4, 668—684 (англ.)

В работе изучается спектр уравнения $\nabla^2 u + \lambda u = 0$, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \cdots + \partial^2 / \partial x_n^2$, в том случае, когда граничное условие дается на поверхности, простирающейся в бесконечность. Вначале указываются границы для числа собственных значений дискретного спектра в случае граничного условия $u=0$. Затем изучается недискретный спектр и показывается, что в случае цилиндрической полубесконечной трубки спектр состоит из непрерывной части и конечного числа собственных значений конечной кратности в каждом конечном интервале.

Далее изучаются конические области. Связная область называется конической, если ее граница для $r \geqslant r_0$ есть конус, образованный лучами, проведенными из начала координат через замкнутую кривую, расположенную на единичной сфере. Показывается, что в случае конической области и граничного условия $u=0$ спектр непрерывен в интервале $(0, \infty)$. Указанные теоремы обобщаются на граничное условие $\partial u / \partial \nu + \sigma u = 0$ и на уравнение $\nabla^2 u + b(x_1, \ldots, x_n) u + \lambda u = 0$.

Дается пример, показывающий, что для конической области слабое возмущение граничного условия может породить точечный спектр в непрерывном. Доказана также теорема единственности для конических полубесконечных областей при граничных условиях типа излучения. Результаты работы применяются к теории поверхностных волн. *Б. М. Левитан*

4808. Об одном функциональном уравнении. Митринович (Sur une équation fonctionnelle. Mitrinovitch Dragoslav S.), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 11, 550—551 (франц.)

Указываются общие выражения, дающие решения уравнений

$$\frac{u_{xx}}{X'^2} - \frac{u_{yy}}{Y'^2} - \left(\frac{X''}{X'^3} u_x - \frac{Y''}{Y'^3} u_y\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{u_x^2}{X'^2} - \frac{u_y^2}{Y'^2}\right),$$

$$\frac{u_{xx}}{X'^2} - \frac{u_{yy}}{Y'^2} - \left(\frac{X''}{X'^3} u_x - \frac{Y''}{Y'^3} u_y\right) = 0,$$

где $X(x) \not\equiv 0$, $Y(y) \not\equiv 0$ — заданные функции. Эти уравнения преобразованием переменных $\xi = X(x) + Y(y)$, $\eta = X(x) - Y(x)$ приводятся к виду $uu_{\xi\eta} = u_\xi u_\eta$, $u_{\xi\eta} = 0$, соответственно. Общие решения этих уравнений пишутся сразу: $u = f(\xi) g(\eta)$, $u = F(\xi) + G(\eta)$. Выражение же, одновременно удовлетворяющее обоим уравнениям, очевидно, должно иметь вид $\theta_1(X+Y)$ или $\theta_2(X-Y)$. Поэтому соотношения

$$f(\xi) g(\eta) = F(\xi) + G(\eta) \equiv \theta_1(\xi) \text{ и } f(\xi) g(\eta) = F(\xi) + G(\eta) \equiv \theta_2(\eta)$$

имеют место лишь при $g(\eta) = \text{const}$, $G(\eta) = \text{const}$ и $f(\xi) = \text{const}$, $F(\xi) = \text{const}$.

На основании этого автор заключает, что функциональное уравнение

$$f^{(m)}(u) f(v) = f(u) + f^n(v)$$

имеет решения $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ при $m=0$, $n>1$, $f \equiv 0$, $f \equiv 2$ при $m=0$, $n=0$ и тривиальное решение $f \equiv 0$ при $m>1$, $n \geqslant 0$. *А. В. Бицадзе*

4809. Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа. Шапиро З. Я., Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, **17**, № 6, 539—562

Результаты, полученные автором ранее (Матем. сб., 1951 **28(70)**, № 1, 55—78), распространяются на более общий тип граничных условий. Рассматривается система уравнений эллиптического типа вида (в матричной записи)

$$\sum_{i_1+i_2+i_3=k} A_{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}} = 0,$$

($u = (u^1, \ldots, u^n)$, $A_{i_1 i_2 i_3}$ — действительные постоянные матрицы порядка n), при граничных условиях вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k_1+k_2+k_3 \leqslant l} c^{\mu\nu}_{k_1 k_2 k_3} \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} u^\nu}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} = f_\mu \left(\mu = 1, \ldots, \frac{1}{2} kn\right).$$

Порядок граничных условий l может превышать порядок системы уравнений k. Предполагается выполненным некоторое алгебраического характера условие «регулярности» задачи.

Для ограниченной выпуклой области с гладкой границей строится система регулярных интегральных уравнений, решение которой приводит к решению поставленной граничной задачи. В этом случае коэффициенты $c^{\mu\nu}_{k_1 k_2 k_3}$ граничных условий предполагаются непрерывными.

Для полупространства указывается явная форма решения задачи; в этом случае предполагается, что граничные условия содержат только производные порядка l, коэффициенты $c^{\mu\nu}_{k_1 k_2 k_3}$ постоянны, функции f_μ непрерывны на граничной плоскости и достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности. *Я. Б. Лопатинский*

4810. О множестве нулевой емкости и обращении потенциала в бесконечность. Ниномия (Sur un ensemble de capacité nulle et l'infini d'un potentiel. Ninomiya Nobuyuki), Math. J. Okayama Univ., 1953, **2**, 99—101 (франц.)

Каждое ограниченное множество $A \subset R^m$, являющееся множеством G_δ, внешней емкости нуль, есть множество, во всех точках которого некоторый ньютонов потенциал U^μ обращается в бесконечность (Deny J., C. r. Acad. sci, 1947, 224, 524—525). Если A замкнуто, то можно предполагать, что на A распределена положительная мера μ (Evans G. C., Monatsh. Math. und Phys., 1936, 43, 419—424); автор доказывает, что так же обстоит дело, когда A содержится в F_σ нулевой емкости;

его метод применим для потенциалов порядка α, $0 < \alpha < m$. *J. Deny*

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 30.

4811 РЕЦ. Задача Коши для дифференциальных уравнений с частными производными. Зауэр (Anfangswertprobleme bei partieller Differentialgleichungen. Sauer R., XIII+239 pp., Springer-Verlag, Berlin, 1952, 29 DM) [Рецензия: Лайтхилл (Lighthill M. J.), Proc. Phys. Soc. Sec. A., 1953, 66, ч. 7, № 403, 669—670 (англ.)]

4812 Д. О решении в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций. Чеботарев Г. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанский Гос. ун-т, Казань, 1954

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

4813. Об одном методе решения однородной задачи для симметрично нагруженной торообразной оболочки. Эстрин М. И., Прикл. матем. и механика, 1953, 17, № 5, 619—622

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$(1 + \alpha \sin\theta)\frac{d^2V}{d\theta^2} - \alpha\cos\theta\frac{dV}{d\theta} + \alpha\lambda^2 i \sin\theta V = 0.$$

При помощи замены зависимого переменного уравнение приводится к уравнению типа Хилла, которое решается обычным способом. Благодаря малости параметра α бесконечный определитель, встречающийся при определении характеристического показателя, заменяется конечным определителем 3-го или 5-го порядка.

Отношение двух последовательных коэффициентов разложения в ряд Фурье периодической функции, входящей в качестве множителя в решение уравнения, находится в виде бесконечной цепной дроби. При $\alpha \ll 1$ все формулы значительно упрощаются. *А. П. Проскуряков*

4814. О предельном поведении некоторых квантово-механических величин. Маслов В. П., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 4, 623—626

Рассматривается одномерное уравнение Шредингера

$$\frac{h^2}{2m}y'' + \{\lambda - u(x)\}\, y = 0$$

для случая потенциальной ямы с несколькими впадинами, т. е. для случая, когда $u(x)$ непрерывна, имеет конечное число экстремумов и $u(+\infty) = u(-\infty) = \infty$. Высказываются три теоремы об асимптотическом поведении при $h \to 0$ собственных функций этого уравнения, разъясняющие, каким образом дискретный спектр оператора $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^3}{dx^2} + u(x)$ переходит при $h \to 0$ в непрерывный спектр оператора умножения на $u(x)$. Теоремы допускают некоторую физическую интерпретацию. Доказательства теорем не приводятся. *М. И. Петрашень*

4815. Смещения эпицентра под действием упругих волн в бесконечном слое. Менчер (Epicentral displacement caused by elastic waves in an infinite slab. Mencher Alan G.), J. Appl. Phys. (N.Y.), 1953, 24, № 9, 1240—1246 (англ.)

Рассматриваются смещения эпицентра источника продольных волн. Источник расположен в середине бесконечного пространственного слоя. Зависимость его от времени кусочно-постоянна. Слой однороден, граничная среда — вакуум.

К волновым уравнениям для потенциалов, записываемых в цилиндрических координатах, применяется преобразование Лапласа. Представление скалярного потенциала (содержащее член, соответствующий источнику) преобразуется при помощи метода отражений. Для обращения формального решения, получаемого после использования граничных условий, проводится разложение подинтегрального выражения в ряд и почленное преобразование.

Автор сам отмечает недостаточную обоснованность перестановки предельных процессов. Проводится физическое рассмотрение результата.

Автор не указывает на работы, связанные с рассматриваемым вопросом, но использующие методы, отличные от интегральных преобразований (Соболев С. Л., Матем. сб., 1933, 40, № 2, 236—266; Нарышкина, Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, 1934, № 38, 1—11, и др.). *А. А. Дезин*

4816. Верхняя и нижняя границы для жесткости при кручении. Уэйнбергер (Upper and lower bounds for torsional rigidity. Weinberger H. F.), J. Math. and Phys., 1953, 32, № 1, 54—62 (англ.)

Задачу кручения стержня, основание R которого ограничено извне кривой γ_0, а изнутри кривыми γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, можно свести к интегрированию уравнения $\Delta\Psi = -2$ при краевых условиях $\Psi = 0$ на γ_0, $\Psi = C_i$ на γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Постоянные C_i подлежат определению из условия

$$\int_\gamma \frac{\partial\Psi}{\partial n}\, ds = -2A(\gamma),$$

где γ — произвольная замкнутая кривая в R, $A(\gamma)$ — площадь ограниченной ею области и n — внешняя нормаль к γ.

Так называемая «жесткость при кручении» есть произведение модуля сдвига материала на интеграл

$$S = \iint_R (\Psi_x^2 + \Psi_y^2)\, dx\, dy.$$

Автор доказывает минимальный принцип, согласно которому

$$S = \min \iint_R (f_x^2 + f_y^2)\, dx\, dy,$$

где f — любое непрерывно дифференцируемое решение уравнения $\Delta f = -2$ (в статье опечатка: написано $\Delta f = 0$), удовлетворяющее условию

$$\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial n}\, ds = -2A(\gamma).$$

Если область R есть сумма областей $R_1, R_2, \ldots, R_n$, которые не пересекаются, но могут иметь общие части границы, то соответствующие жесткости удовлетворяют неравенству $S \geqslant S_1 +$

$+S_2+\cdots+S_n$. Это позволяет строить верхние границы для жесткостей частичных областей.

Отметим другое следствие, полученное автором из минимального принципа. Пусть R_1 — двусвязная область, полученная удалением области R_2 из односвязной области R_{12}, и пусть Ψ — функция напряжений для области R_{12}. Пусть, далее, R_2' — область, содержащаяся в R_{12} и содержащая R_2. Если существует линия уровня функции Ψ, лежащая внутри R_2', но вне R_2, то жесткости соответствующих областей связаны неравенством $S_1 \geqslant S_{12} - S_2'$.

Построены двусторонние оценки жесткости для некоторых двусвязных областей. Приведем один пример: для квадрата со стороной $2b$, из которого вырезан концентрический круг радиуса r, имеем $2{,}2496\,b^4 - \frac{\pi r^4}{2} \geqslant S \geqslant 2{,}2496\,(b^4 - r^4)$. *С. Г. Михлин*

4817. Частоты продольных колебаний тонкого стержня переменного сечения. Любкин, Льюк (Frequencies of longitudinal vibration for a slender rod of variable section. Lubkin James L., Luke Yudell L.), J. Appl. Mech., 1953, **20**, № 2, 173—177 (англ.)

Одномерная задача о продольных колебаниях тонкого стержня с площадью сечения $A(x)$ длины $L_1 + L_2$ приводит к уравнению для смещения u:

$$u_{tt} = \frac{c^2}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} [A(x)\, u_x],\ c^2 = \frac{E}{\rho}.$$

Предполагается, что конец $x = 0$ заделан, $u|_{x=0}=0$, конец $x = L_1 + L_2$ свободен, $u_x|_{x=L_1+L_2} = 0$, и что

$$A(x) = \begin{cases} A_0 & (0 \leqslant x \leqslant L_1), \\ A_0\left(1 + \varepsilon \dfrac{x - L_1}{L_2}\right) & (L_1 \leqslant x \leqslant L_1 + L_2), \end{cases}$$

$\varepsilon > -1$, т. е. что площадь сечения постоянна у заделанного конца и затем линейно изменяется по длине с соблюдением непрерывности при $x = L_1$. Подстановка $u = e^{ip_n t} X_n(x)$, с учетом непрерывности смещения и напряжения при $x = L_1$, ведет к формулам ($\nu_n = p_n / c$):

$$X_n(x) = \begin{cases} \sin \nu_n x & (0 \leqslant x \leqslant L_1), \\ C_n J_0\left[\dfrac{\nu_n L_2}{|\varepsilon|} \dfrac{A(x)}{A_0}\right] + D_n Y_0\left[\dfrac{\nu_n L_2}{|\varepsilon|} \dfrac{A(x)}{A_0}\right] & \\ \qquad (L_1 \leqslant x \leqslant L_1 + L_2), & \end{cases}$$

из которых в силу краевых условий вытекает уравнение для собственных частот p_n:

$$\{J_1[\beta(1+\varepsilon)]\, Y_1(\beta) - Y_1[\beta(1+\varepsilon)]\, J_1(\beta)\} \sin\gamma + \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \{J_1[\beta(1+\varepsilon)]\, Y_0(\beta) - Y_1[\beta(1+\varepsilon)]\, J_0(\beta)\} \cos\gamma = 0, \quad (1)$$

где $\beta = \dfrac{\nu_n L_2}{|\varepsilon|}$, $\gamma = \nu_n L_1$. Уравнение (1) исследуется в зависимости от параметров L_1, L_2 и ε. Из асимптотических формул делается заключение, что высшие частоты практически не зависят от ε, а зависят только от общей длины стержня $L_1 + L_2$. Приводятся графики $X_n(x)$, $n = 1, 2, 3$ для $\varepsilon = 0$, 1, -1 и $\lambda = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2} = 0{,}375$, и таблица значений $\nu_n(L_1 + L_2)$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5$ и $\lambda = 0 - 1$ (0,125).

Отмечается возможность приложений к расчету некоторых неравномерно движущихся деталей механических звукозаписывающих и звуковоспроизводящих аппаратов (например, патефонных иголок) и других механизмов. *В. И. Левин*

4818. Об одной плоской задаче уравнения теплопроводности. Ким Е. И., Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. пед. ин-та, 1953, № 2, 31—38

Обозначая через D_1 область на плоскости $t = 0$ трехмерного пространства (x, y, t), лежащую над осью Ox и ограниченную кривой C с непрерывной кривизной, а через D_2 часть полуплоскости $t = 0$, $y > 0$, расположенную вне D_1, автор рассматривает смешанную задачу для уравнения теплопроводности:

$u_t = u_{xx} + u_{yy}$ в областях D_1 и D_2 при $0 < t \leqslant T$, (1)

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad (2)$$

$$(-\infty \leqslant x \leqslant \infty,\ y \geqslant 0), \quad (3)$$

$$u(x, 0, t) = \varphi(t, x)$$
$$(0 \leqslant t \leqslant T,\ -\infty \leqslant x \leqslant \infty),\ [f(x,0) = \varphi(0, x)]$$

$$k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = k_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_l \text{ на кривой } C, \quad (4)$$

где $f(x, y)$ и $\varphi(t, x)$ — заданные функции, непрерывные и ограниченные в рассматриваемых областях, а k_1 и k_2 — положительные числа.

Решение этой задачи, правильное в D_1 и D_2 и непрерывное в области $y > 0$, $0 < t \leqslant T$, разыскивается в виде суммы трех слагаемых, первое из которых — решение задачи Коши (1), (2) для полупространства $t > 0$ в случае уравнения (1), а второе и третье слагаемые аналогичны обычным потенциалам двойного и простого слоя.

Удовлетворяя условиям (3) и (4), автор приходит к интегральному уравнению для плотности потенциала простого слоя, которое решается методом последовательных приближений. Равномерная сходимость процесса итераций, как доказывает автор, обеспечена ограничениями, введенными для функций $f(x, y)$, $\varphi(t, x)$ и кривой C. *М. Б. Капилевич*

4819. Проблема распространения тепла и произведение двух функций ошибок. Рейнвилл (A heat conduction problem and the product of two error functions. Rainville Earl D.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 1, 43—47 (англ.)

Доказывается тождество

$$\operatorname{erf}(r\cos\varphi)\operatorname{erf}(r\sin\varphi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(4n+2)\varphi]\, r^{4n+2}\, {}_1F_1(2n+1; 4n+3; -r^2)}{(2n+1)\, 2^{4n+1}\, (3/2)_{2n}},$$

где

$$(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1);$$

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha;$$

$${}_1F_1(a;\ b;\ z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}.$$

Доказательство основано на равенстве двух решений одной и той же краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \text{для } 0<t,\ \ 0<x,\ \ 0<y,$$

$$u \to 1 \text{ при } t \to +0 \text{ для } 0<x,\ \ 0<y,$$

$$u \to 0 \text{ при } x \to +0 \text{ для } 0<t,\ \ 0<y,$$

$$u \to 0 \text{ при } y \to +0 \text{ для } 0<t,\ \ 0<x.$$

Одно решение берется в форме

$$u = \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2ht^{1/2}}\right] \operatorname{erf}\left[\frac{y}{2ht^{1/2}}\right],$$

другое ищется методом разделения переменных. Показывается также, что решение краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \text{для } 0<t,\ 0<\rho,$$

$$0<\theta<\beta,$$

$$u \to 1 \text{ при } t \to +\ 0 \text{ для } 0<\rho,\ \ 0<\theta<\beta,$$

$$u \to 0 \text{ при } \theta \to +\ 0 \text{ для } 0<t,\ \ 0<\rho,$$

$$u \to 0 \text{ при } \theta \to \beta - 0 \text{ для } 0<t,\ \ 0<\rho$$

имеет вид

$$u = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n G_n(\rho) \sin\left[(2n+1)\frac{\pi\theta}{\beta}\right],$$

где

$$\alpha_n = \frac{(2n+1)\,\Gamma\left(1 + \frac{(2n+1)\,\pi}{2\beta}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{(2n+1)\,\pi}{\beta}\right)},$$

$$G_n(\rho) = \left[\frac{\rho^2}{4h^2 t}\right]^{(2n+1)\frac{\pi}{\beta}} \times$$

$$\times\ {}_1F_1\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{2\beta};\ \ 1 + \frac{(2n+1)\,\pi}{\beta};\ \ \frac{-\rho^2}{4h^2 t}\right).$$

Л. И. Камынин

4820. Колебания плавающего контура на поверхности тяжелой жидкости. Хаскинд М. Д., Прикл. матем. и механика, 1953, **17**, № 2, 165—178

Задача о качке цилиндрических судов сводится к отыскиванию гармонической функции

$$\Phi(y,\ z,\ t) = \varphi(y,\ z)\, e^{i\sigma t},$$

удовлетворяющей следующим граничным условиям:

1) на свободной поверхности: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi\nu = 0$ при

$$z = 0, \quad |y| > a \quad \left(\nu = \frac{\sigma^2}{g}\right);$$

2) на контуре судна: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n$, где $v_n\, e^{i\sigma t}$ — нормальная составляющая скорости какой-либо точки контура, $2a$ — ширина контура по ватерлинии. Функция $\varphi = \operatorname{Re} w(x)$, где $x = y + iz$, должна удовлетворять еще и асимптотическим условиям на свободной поверхности в бесконечности, различным при $y \to +\infty$ и при $y \to -\infty$ вследствие возмущающего действия судна.

По аналогии с задачей о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости автор определяет w путем введения вспомогательной функции f, где

$$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{dx} + i\nu w.$$

Область течения плоскости x отображается конформно на область, внешнюю единичному кругу плоскости τ, и функция f представляется в виде

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^{-n} + a_0 \ln \tau,$$

где a_n — постоянные коэффициенты, для определения которых из граничных условий получается бесконечная система уравнений.

Произведены подробные расчеты для класса контуров, определяемых отображением

$$x = k_0\tau + k_1\tau^{-1} + k_2\tau^{-3}.$$

Этот класс контуров дает целый набор характерных сечений судов (при $k_2 = 0$ сечение имеет эллиптическую форму).

В работе выведены общие формулы для гидродинамических сил и момента, действующих на контур.

М. И. Гуревич

4821. Отражение и преломление сферических звуковых волн при переходе из неподвижной среды в движущуюся. Войт С. С., Прикл. матем. и механика 1953, **17**, № 2, 157—164

Задача заключается в следующем: пусть имеются два полупространства ($z > 0$ и $z < 0$), заполненных жидкостями и разделенные плоскостью $z = 0$. Верхняя и нижняя среды характеризуются соответственно плотностями ρ, ρ_1 и скоростями распространения звука в этих средах c, c_1. Верхняя среда покоится, а нижняя движется со скоростью U в направлении оси x. В точке $z = h > 0$ находится источник гармонических звуковых волн частоты σ.

Вводятся потенциалы скоростей звуковых волн для верхней и нижней сред соответственно:

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ t) = e^{-i\sigma t}\,\varphi(x,\ y,\ z),$$

$$\Phi_1(x,\ y,\ z,\ t) = e^{-i\sigma t}\,\varphi_1(x,\ y,\ z).$$

Относительно $\varphi(x,\ y,\ z)$ и $\varphi_1(x,\ y,\ z)$ физическая задача приводится к следующей математической задаче.

Ищутся функции φ и φ_1, удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \text{ при } z > 0,$$

$$\Delta\varphi_1 + k_1^2\varphi_1 + 2i\beta k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z < 0$$

и граничным условиям

$$k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + i\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \quad m\left(k_1 \varphi_1 + i\beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) = k_1 \varphi \text{ при } z = 0,$$

где

$$k = \frac{\sigma}{c}, \quad k_1 = \frac{\sigma}{c_1}, \quad \beta = \frac{U}{c_1}, \quad m = \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Получено полное выражение искомых потенциалов, а затем при помощи известной асимптотической оценки двойных интегралов (Конторович М. И., Муравьев Ю. К., Ж. техн. физики, 1952, 22, № 3, 394—407) дается полное асимптотическое исследование потенциалов методом перевала. На основании этого исследования выясняется ряд особенностей изучаемого физического явления и устанавливается, что потенциалу отраженных волн можно дать следующую асимптотическую оценку (с сохранением первого члена порядка r^{-1}):

$$\varphi_r = \frac{m(n - \beta\cos\psi\cos\chi)^2 \sin\psi - A_n}{m(n - \beta\cos\psi\cos\chi)^2 \sin\psi + A_n} \cdot \frac{\exp(ikr)}{r},$$

где $A_n = n^2 \sqrt{(n - \beta\cos\psi\cos\chi)^2 - \cos^2\psi}$.

Отсюда при $\beta = 0$ получается формула Л. М. Бреховских (Бреховских Л. М., Успехи физ. наук, 1949, 38, № 1, 1—42), полученная им для случая, когда нижняя среда покоится.

Потенциал преломленных волн исследуется только в случае плоскости $y = 0$. Асимптотическая оценка дается в виде

$$\varphi_1 = \frac{i}{r}\left[\frac{2\pi}{\sqrt{(w_{qq} w_{\theta\theta} - w_{q\theta}^2)_{11}}} F(q_1, \theta_1) \times \right.$$

$$\times \exp\left\{i\sigma\left[-\frac{\beta x}{c(1-\beta^2)} + \frac{1}{c(1-\beta^2)}\sqrt{x^2 + (1-\beta^2)z^2}\right]\right\} + \left. + \frac{1}{r} O\left(\frac{1}{r}\right),\right.$$

где

$$F(q, \theta) = \frac{ik_1}{\pi} \frac{q(n - \beta q\cos\theta) \times}{m(n - \beta q\cos\theta)^2 \times}$$

$$\frac{\times \exp[ikh(\sqrt{1-q^2} - \sqrt{(n - \beta q\cos\theta)^2 - q^2}]}{\sqrt{1-q^2} + n^2\sqrt{(n - \beta q\cos\theta)^2 - q^2}},$$

$w(q, \theta) = q\cos\psi_1\cos\theta + \sin\psi_1\sqrt{(n - \beta q\cos\theta)^2 - q^2}$,

индексы 11 означают, что значение соответствующего выражения берется в точке (q_1, θ_1).

Проведено сравнение полученных результатов с приближением геометрической акустики.

Д. З. Авазашвили

4822. Влияние магнитного поля на стабильность звезд. Тандберг-Хансен (Influence d'un champ magnétique sur la stabibilité des étoiles. Tandberg-Hanssen E.), Ann. astrophys., 1953, 16, №4, 206—216 (франц.)

Рассматривается влияние магнитного поля на форму звезды при бесконечно-малой скорости вращения. Уравнение движения звезды в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\Phi + \frac{1}{\rho}[\mathbf{j} \times \mathbf{H}], \qquad (1)$$

где ρ — плотность звезды, Φ — потенциал тяготения, p — давление, $\mathbf{H}$ — магнитное поле, $\mathbf{j}$ — плотность тока.

Рассмотрены три модели звезды при различном задании магнитного поля: 1) плотность постоянна, магнитное поле $\mathbf{H}^{(z)}$ параллельно и симметрично относительно оси вращения z и не зависит от z; 2) плотность переменна, магнитное поле то же, что и в первом случае; 3) плотность постоянна, магнитное поле является суперпозицией $\mathbf{H}^{(z)}$ с полем магнитного диполя, помещенного в центре звезды и параллельного оси z.

Уравнение (1) для указанных моделей решается в предположении, что магнитное поле H мало влияет на изменение величин ρ, p, Φ. Получены формулы для вычисления изменения формы звезды. В заключение рассмотрен численный пример. Расчет произведен для Солнца. Оказалось, что магнитное поле вызывает сплющивание Солнца по радиусу вращения и удлинение по оси вращения.

П. П. Бирюлин

4823. Потенциал двух точечных источников тока в однородном проводящем вытянутом сфероиде. Уэйт (The potential of two current point sources in a homogeneous conducting prolate spheroid. Wait James R.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 4, 496—497 (англ.)

В двух произвольных внутренних точках вытянутого эллипсоида вращения $\rho^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$ находятся источники тока I и $-I$. Потенциал поля дается в виде ряда по присоединенным функциям Лежандра первого и второго родов в эллипсоидальных координатах (Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, Изд-во иностр. лит-ры, Москва, 1952).

Для определения коэффициентов разложения использованы два условия: 1) если размеры эллипсоида неограниченно увеличивать, то потенциал должен обратиться в

$$V = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1 и R_2 — расстояния до источников; 2) на поверхности эллипсоида нормальная производная потенциала равна нулю.

Автор предлагает использовать полученную им формулу в электрокардиографии; по его мнению, она может дать лучшие результаты, чем формулы, выведенные в предположении, что проводящая масса (т. е. человеческое тело) имеет сферическую форму.

И. М. Соболь

4824. Краевая задача геоэлектричества для шара и цилиндра. Хубер (Die Randwertaufgabe der Geoelektrik für Kugel und Zylinder. Huber A.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 10—11, 382—393 (нем.; резюме англ., франц., русск.)

Рассматривается задача об отыскании потенциала поля, порождаемого точечным источником в неоднородной среде. Математически задача ставится следующим образом.

Пусть все трехмерное пространство разделено некоторой поверхностью τ на две области T_1 и T_2. В пространстве задана некоторая точка M_0. Требуется найти две функции $U_1(M)$ в T_1 и $U_2(M)$

в T_2, имеющие вид

$$U_i(M) = \frac{1}{R} + \overline{u}_i(M), \quad i = 1, 2,$$

где R — расстояние от точки M до M_0, и $\overline{u}_i(M)$ — гармоническая функция в T_i. На τ должны выполняться краевые условия

$$U_1|_\tau = U_2|_\tau, \qquad \rho_2 \frac{\partial U_1}{\partial n_1}\Big|_\tau = \rho_1 \frac{\partial U_2}{\partial n_2}\Big|_\tau,$$

где ρ_1 и ρ_2 — заданные положительные постоянные и n_i — направление нормали к τ, внешнее по отношению к области T_i.

Эта задача решается в двух случаях: когда поверхность τ — сфера, а также когда поверхность τ — круговой бесконечный цилиндр. В обоих случаях строится формальное решение задачи — в первом случае с помощью разложения по сферическим функциям, а во втором — с помощью разложения по цилиндрическим функциям. Строгое доказательство того, что построенные функции действительно решают задачу, в работе отсутствует.

Д. М. Эйдус

4825 К. Простая модель для суммирования углов при решении обыкновенных уравнений и проблем устойчивости методом построения годографов, связанных с распределением корней. Гаррис (A simple analogue instrument for summing angles in the root locus method of solving ordinary equations and stability problems. Harris Arnold H., 14 pp., Radiation Lab., Univ. Calif., Berkeley, 1953) (англ.)

Кратко излагается метод изучения проблем устойчивости сервомеханизмов по годографу, определяющему распределение корней. Описывается также простая механическая модель (суммирующее устройство), не содержащая зубчатых передач, предназначенная для выполнения наибольшей части вычислительной работы, связанной с применением этого метода.

Перевод из Nuclear Sci. Abstrs, 1953, 7, № 20, 682—683.

См. также: 4741, 4751, 4836, 4858, 4913, 4914, 4916, 4917

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4826. Замечание к одной работе Рунда. Вельте (Bemerkung zu einer Arbeit von H. Rund. Velte Waldemar), Arch. Math., 1953, **4**, № 4, 343—345 (нем.)

Известно, что для каждой вариационной задачи можно построить бесконечно много функций Гамильтона в смысле Каратеодори (Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1935, 218). В работе Рунда (Rund H., Arch. Math., 1952, **3**, № 3, 207—215) была исследована вариационная задача

$$\int f(x_i, \dot{x}_i)\, dt = \min, \qquad (1)$$

где $f(x_i, \dot{x}_i)$ — функция, положительная, положительно однородная 1-го порядка и выпуклая относительно $\dot{x}_i$.

Рассматривая f, $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}$ и $\dot{x}_i$ как координаты пространства R^{2n+1} и преобразовывая их в новые переменные F, F_i, y_i посредством соотношений

$$y_i = f f_i, \quad F_i = \frac{\dot{x}_i}{f}, \qquad F = f,$$

Рунд получил для задачи (1) определенную функцию Гамильтона в смысле Каратеодори

$$H(x, y) = F(x, y) - 1.$$

В реферируемой работе рассматривается более общее преобразование

$$y_i = f f_i, \quad F_i' = \lambda \frac{x_i}{f}, \qquad F' = \lambda f, \qquad \Lambda = \lambda \quad (2)$$

с неравной нулю дважды непрерывно дифференцируемой функцией $\lambda = \lambda(x, \dot{x})$ и доказывается, что

$$H'(x, y) = F' - \Lambda = \Lambda H(x, y)$$

тоже является функцией Гамильтона и что все функции Гамильтона для задачи (1) можно получить при помощи преобразования (2).

М. К. Керимов

4827. Вариационное исчисление как вспомогательное средство инженера-проектировщика. Функе (Die Variationsrechnung als Hilfsmittel des entwerfenden Ingenieurs. Funke L.), Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1953, **19**, № 4, 115—122 (нем.)

Изучается вопрос о наиболее выгодном конструировании сооружений, состоящих из труб, таких, как водопроводные или газовые линии; в некоторых случаях результаты могут применяться и к электрическим линиям передачи. Если в сооружении имеется $n+1$ отрезков, соединяющихся только в концах, переменная длина вдоль i-го отрезка обозначается через x_i, а диаметр трубы в точке x_i i-го отрезка — через $D_i(x_i)$, то стоимость эксплуатации сооружения в течение года равна

$$K = \sum_{i=0}^{n} \int_0^{l_i} K_i(x_i, D_i(x_i))\, dx_i + K_a,$$

причем должны выполняться дополнительные условия

$$\sum_{i=0}^{n} \int_0^{l_i} F_{ki}(x_i, D_i(x_i)) dx_i = \Delta h_k \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Здесь K_a, Δh_k — постоянные, K_i, F_{ki} — функции, определяемые в работе.

Функции $D_i(x_i)$ должны быть таковы, чтобы стоимость была наименьшей при заданных дополнительных условиях. Таким образом, получается обычная изопериметрическая задача с подинтегральными функциями, не зависящими от произ-

водных; автор решает ее, не предполагая у читателя знакомства с вариационным исчислением.

Приводится численный пример, в котором $D_i(x_i)$ получаются близкими к постоянным D_i; предлагается брать диаметр труб на i-ом отрезке равным D_i. В более сложных случаях, когда уравнения Эйлера не интегрируются, рекомендуется метод Ритца. *А. И. Фет*

См. также: 4816, 4844, 4915, 4916, 4917

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

4828. Зоратовы децимации. Каттанео (Decimazioni zoratiane. Cattaneo P.), Giorn. mat. Battaglini, 1952—1953, 81 (1953), № 2, 219—223 (итал.)

Децимацией у древних римлян называлось наказание легиона, в котором по жребию убивался каждый десятый легионер. Альфред Зорат назвал этим именем некоторые перестановки, полученные им в результате обобщения одной математической игры, сущность которой заключается в следующем:

На корабле во время бури находилось 15 христиан и 15 турок. Их расположили в круг и стали выбрасывать в море каждого девятого по порядку, не обращая внимания на пустые места, оставшиеся после уже произведенных выбрасываний. Как должно поставить всех тридцать человек, чтобы после 15 выбрасываний остались только одни христиане?

Зорат рассматривает круговую подстановку из n натуральных чисел. Если дано некоторое число a (так называемый шаг децимации), то, отсчитывая в этой подстановке каждый a-тый элемент, начиная от единицы, возвращаясь к последней после исчерпания всех элементов и не обращая внимания на остающиеся пустые места, мы получаем после исчерпания всех n элементов некоторую перестановку

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ обозначают элементы, выброшенные после первого отсчета a элементов (α_1), после второго (α_2) и т. д. Эту перестановку Зорат называет децимацией на основании n по шагу a и обозначает $(n)/\bar{a}$, например $(5)/7 = 2,5,1,3,4$.

В статье рассматриваются некоторые свойства децимации. *И. Н. Веселовский*

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4829. О некоторых теоремах, относящихся к суммированию расходящихся рядов. Обрешков (Върху някои теореми за сумирането на разходящите редове. Обрешков Никола), Изв. матем. ин-т (Бълг. АН), 1953, **1**, № 1, 3—26 (болг., резюме русск.)

Работа, в основном, является развитием результатов автора, опубликованных в Докл. АН СССР, 1949, **67**, № 2, 225—228.

Пусть функция $\varphi(x) > 0$, определенная для $x > a$, и последовательность положительных чисел p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ таковы, что для всякого $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(\lambda x) / \varphi(x) = \lambda^m, \quad \lim_{n\to\infty} p_{[\lambda n]} / p_n = \lambda^m,$$

где m — действительное число. Пусть последовательности $\{x_i\}$, $\{x_i'\}$ и $\{n_i\}$, $\{n_i'\}$ действительных чисел x_i, x_i' и целых положительных чисел n_i, n_i' подчинены требованию $qx_i \leqslant x_i' \leqslant x_{i+1}$, $qn_i \leqslant n_i' \leqslant n_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где $q > 1$.

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $f(x)$ — действительная функция, которая в интервалах $X_i \equiv (x_i < x < x_i')$ имеет производную $f^{(n)}(x) > -Mx^{-n}\varphi(x)$, где $M = \text{const} > 0$, а функция $\varphi(x)$ монотонна на множестве всех X_i. Если $f(x) \sim A\varphi(x)$, когда $x \to \infty$, оставаясь в интервалах X_i, то

$$f^{(j)}(x) \sim Am(m-1)\ldots(m-j+1)x^{-j}\varphi(x) \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1),$$

когда $x \to \infty$, оставаясь в интервалах $X_{i\varepsilon} \equiv [(1+\varepsilon) \times x_i \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon)x_i']$, где ε — произвольно малое положительное число.

Заменив условие $f^{(n)}(x) > -Mx^{-n}\varphi(x)$ условием $|f^{(n)}(x)| < M$, можно в формулировке теоремы заменить интервалы $X_{i\varepsilon}$ интервалами X_i.

2. Пусть в вышеуказанных интервалах X_i функция $f(x)$ имеет производную $f^{(n)}(x)$, монотонную на множестве всех X_i. Если $f(x) \sim A\varphi(x)$, когда $x \to \infty$, оставаясь в интервалах X_i, то $f^{(n)}(x) \sim Am(m-1)\ldots(m-n+1)x^{-n}\varphi(x)$, когда $x \to \infty$, оставаясь в интервалах $X_{i\varepsilon}$ (см. 1).

3. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел такая, что при любом $n \in N_i \equiv (n_i < n < n_i')$ $(i = 1, 2, \ldots)$ к-ая разность $\Delta^k a_n > -Mn^{-k}p_n$, где $M = \text{const} > 0$, а числа p_n образуют последовательность, монотонную на множестве всех N_i. Если $a_n \sim Ap_n$, когда $n \to \infty$, оставаясь в интервалах N_i, то

$$\Delta^j a_n \sim Am(m-1)\ldots(m-j+1)n^{-j}p_n \quad (1 \leqslant j \leqslant k-1),$$

когда $n \to \infty$, оставаясь в интервалах $N_{i\varepsilon} \equiv [(1+\varepsilon)n_i \leqslant n \leqslant (1-\varepsilon)n_i']$, где ε — то же, что и выше (см. 1).

4. Пусть при некотором k последовательность величин $\Delta^k a_n$ монотонна на множестве всех интервалов N_i. Если $a_n \sim Ap_n$, когда $n \to \infty$, оставаясь в интервалах N_i, то $\Delta^k a_n \sim Am(m-1)\ldots(m-k+1)n^{-k}p_n$, когда $n \to \infty$, оставаясь в интервалах $N_{i\varepsilon}$ (см. 3).

Эти результаты применимы к методам суммирования (C, k) рядов и интегралов при целом k и приводят к теоремам тауберова типа. В частности,

из теоремы 3 получается следующий результат: пусть для членов ряда $u_1+u_2+\ldots$ имеем $u_n>-Mn^{-1}$ ($M=\text{const}>0$) при $n\in N_i$ ($i=1,2,\ldots$) и пусть для указанного ряда при некотором целом k средние Чезаро $c_n^k\to s$, когда $n\to\infty$, оставаясь в интервалах N_i; тогда частные суммы s_n указанного ряда стремятся к s, когда $n\to\infty$, оставаясь в интервалах $N_{i\varepsilon}$. Доказана еще теорема другого рода:

5. Если периодическая (с периодом 2π) функция $f(x)\in\mathrm{Lip}\alpha$, $0<\alpha<1/2$, то для частных сумм $s_\nu(x)$ ряда Фурье этой функции имеем

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}[s_\nu(x)-f(x)]^2<Mn^{-2\alpha},$$

где константа M не зависит от n. При $\alpha\geqslant 1/2$ этот результат, вообще говоря, не имеет места.

Отметим, что в статье в ряде мест, где целесообразно было бы ставить знак $<$, стоит $\leqslant$ и наоборот. Имеются опечатки. В резюме на стр. 26 вместо $p_{(\lambda n)}$ должно стоять $p_{[\lambda n]}$, а вместо $a_n\sim Mp_n$ должно быть $a_n\sim Ap_n$. *В. М. Даревский*

4830. Аналог сильного суммирования для метода Абеля. Харингтон, Хислоп (An analogue for strong summability of Abel's summability method. Harington C. F., Hyslop J. M.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, сер. 2, 9, 28—34 (англ.)

Ряд Σa_n называется суммируемым $[C;\ k,\ p]$ ($k>0$, $p\geqslant 1$) к сумме s, если

$$\sum_{\nu=0}^{n}|c_\nu^{(k-1)}-s|^p=o(n),$$

где $c_\nu^{(k-1)}$ — чезаровские средние $(k-1)$-го порядка.

Ранее доказано (Hyslop, Proc. Glasgow Math. Assoc., 1951, 1, 16—20), что для суммируемости $[C;\ k,\ p]$ данного ряда к сумме s необходимо и достаточно:

а) суммируемость $(C;\ k)$ ряда к сумме s;

б) $$\sum_{\nu=1}^{n}\{\nu|a_\nu^{(k)}|\}^p=o(n),$$

где $a_n^{(k)}\equiv c_n^{(k)}-c_{n-1}^{(k)}$.

По аналогии, ряд Σa_n называется суммируемым $[A;\ p]$ ($p\geqslant 1$) к сумме s (или сильно суммируемым методом Абеля (A), если, во-первых, данный ряд суммируем (A), т. е. ряд

$$f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-n/u}$$

сходится при $u>0$ и $f(u)\to s$ $(u\to\infty)$, и, во-вторых,

$$\int_0^{\omega}|uf'(u)|^p du=o(\omega)\quad(\omega\to\infty).$$

Доказываются теоремы:

1) Если ряд Σa_n суммируем $[A;\ p]$, то он суммируем $[A;\ q]$ для $p>q\geqslant 1$.

2) Если ряд Σa_n суммируем $[C;\ k,\ p]$ ($k\geqslant 0$, $p\geqslant 1$), то он суммируем $[A;\ p]$ к той же сумме.

Теорема 2) аналогична следующей классической теореме:

Если ряд Σa_n суммируем $(C;\ k)$, то он суммируем (A) к той же сумме. *М. П. Щеглов*

4831. Тауберовы ряды и их абелевы преобразования посредством степенных рядов. Агнью (Tauberian series and their Abel power series transforms. Agnew R. P.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 218—230 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $\Sigma_{n=0}^{\infty}u_n$ — ряд, удовлетворяющий тауберову условию $\overline{\lim}\,|nu_n|<\infty$, s_n — его частные суммы, $\sigma(t)=\Sigma_{n=0}^{\infty}t^nu_n$. Устанавливается ряд теорем, дающих оценки вида

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to 1-0}}}\,|\sigma(t)-s_n|\leqslant B\,\overline{\lim}\,|nu_n|$$

с наилучшей для этого класса рядов константой B; при этом либо n является функцией t $(0<t<1)$, либо t — функцией n $(n=1,2,\ldots)$. Эти теоремы уточняют прежние результаты автора и других (Agnew R. P., Duke Math. J., 1945, 12, 27—36). Отмечается несколько нерешенных проблем.

Б. И. Коренблюм

4832. Прямые теоремы о методах суммирования III: функции абсолютной суммируемости. Лоренц, Макфейл (Direct theorems on methods of summability III: absolute summability functions. Lorentz G. G., Macphail M. S.), Math. Z., 1953, 59, № 3, 231—246(англ.)

Пусть $\Omega(n)$ определена при $n\geqslant 0$, $\Omega(n)\geqslant 0$, $\Omega(n)$, не убывая, стремится к ∞. Для произвольной возрастающей последовательности натуральных чисел $p=\{p_\nu\}$ обозначим через $\omega(n)=\omega_p(n)$ $(n\geqslant 0)$ число элементов этой последовательности, удовлетворяющих неравенству $p_\nu\leqslant n$.

Функция $\Omega(n)$ называется функцией сходимости для ряда $\Sigma_{n=0}^{\infty}a_n$ с положительными членами, если из неравенства $\omega_p(n)\leqslant\Omega(n)$ всегда следует сходимость ряда $\Sigma_{\nu=0}^{\infty}a_{p_\nu}$.

Пусть дан метод суммирования A:

$$\sigma_m=\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}s_n,\quad m=0,1,2,\ldots.$$

Функция $\Omega(n)$ называется функцией суммируемости для метода A, если из неравенства $\omega_p(n)\leqslant\Omega(n)$ всегда следует суммируемость (A) любой ограниченной последовательности $\{s_n\}$, для которой $s_n=0$ при $n\neq p_\nu$, и функцией абсолютной суммируемости для A, если из указанного неравенства следует абсолютная суммируемость (A) любой такой последовательности, т. е. сходимость соответствующего

ей ряда $\Sigma_{m=0}^{\infty} |\sigma_{m+1} - \sigma_m|$.

Пусть $R^{\varkappa}(\omega)$ — риссовские средние для ряда $\Sigma_{n=0}^{\infty} x_n$ (Харди, Расходящиеся ряды, 1951, Изд-во иностр. лит-ры, М., 146). Ряд $\Sigma_{n=0}^{\infty} x_n$ абсолютно суммируем методом Рисса $R(\lambda_n, \varkappa)$ или суммируем $|R(\lambda_n, \varkappa)|$, если $R^{\varkappa}(\omega)$ есть функция ограниченной вариации на $(0, \infty)$. Аналогично определяется суммируемость $|A(\lambda_n)|$ для метода Абеля $A(\lambda_n)$. Среди доказанных теорем отметим следующие.

1. Пусть $\{u_n\}$ монотонно стремится к нулю. Если $\Sigma_{n=0}^{\infty} \Omega(n)(u_n - u_{n+1}) < \infty$, то $\Omega(n)$ — функция сходимости для ряда $\Sigma_{n=0}^{\infty} u_n$. Обратно, если функция сходимости $\Omega(n)$ для $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

а) $\Delta\Omega(n) = \Omega(n+1) - \Omega(n) \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

б) $u_{p_\nu} \geqslant K u_{p_\nu - 1}$, $K > 0$, для некоторой последовательности $\{p_\nu\}$ такой, что $\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1}) \leqslant p_\nu - p_{\nu-1}$ для достаточно больших ν, то $\Sigma_{n=0}^{\infty} \Omega(n)(u_n - u_{n+1})$ сходится.

2. Пусть $f(x) > 0$, $0 < x < \infty$ произвольная возрастающая функция, для которой

$$\int_1^{\infty} f(x) x^{-2} dx < +\infty, \tag{1}$$

и пусть $\{u_n\}$ — убывающая последовательность. Тогда

$$\Omega(n) = f(1/u_n) \tag{2}$$

есть функция сходимости для $\Sigma_{n=0}^{\infty} u_n$ и, обратно, если $\Omega(n)$ — функция сходимости для $\Sigma_{n=0}^{\infty} u_n$, имеет место (а) или (б) и $u_n \leqslant M u_{n+1}$, то существует функция $f(x)$, удовлетворяющая (1) и (2).

3. Пусть треугольная матрица $(A) = (a_{mn})$, $a_{nn} = u_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условиям:

a_{mn} монотонно стремится к нулю при $m \to \infty$

$$(n = 0, 1, \ldots, m \geqslant n) \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{m} a_{mn} = 1 \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

$$u_{n+1} \leqslant M u_n, \text{ где } M \geqslant 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Тогда $\Omega(n)$ будет функцией абсолютной суммируемости для метода A тогда и только тогда, когда она является функцией сходимости для $\Sigma_{n=0}^{\infty} u_n$.

Теорема остается справедливой, если условия (4) и (5) заменить одним из следующих двух условий:

$$a_{m+1\,n} - a_{m+2\,n} \leqslant M(a_{mn} - a_{m+1\,n}) \quad (n = 0, 1, \ldots; m \geqslant n); \tag{6}$$

$a_{mn} - a_{m+1\,n}$ есть монотонная функция от n для каждого m $(0 \leqslant n \leqslant m)$. (7)

4. Если последовательность $u_n = \Delta\lambda_n / \lambda_n$, $n = 0, 1, \ldots$, убывает к нулю, а $\{\Delta\lambda_n\}$ — невозрастающая последовательность, то $\Omega(n)$ есть функция абсолютной суммируемости для $R(\lambda_n \varkappa)$, $\varkappa \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда она является функцией сходимости для $\Sigma_{n=0}^{\infty} u_n$.

Аналогичные результаты доказываются для $0 < \varkappa < 1$ и метода Абеля $A(\lambda_n)$.

5. Если $\Omega(n)$ возрастает и $\Omega(n) = o(n)$, то существует метод $R(\lambda_n, 1)$, для которого $\Omega(n)$ есть функция абсолютной суммируемости.

6. Метод суммирования A, для которого $\Sigma_{n=0}^{\infty} |a_{on}| < \infty$, имеет функцию абсолютной суммируемости тогда и только тогда, когда существует метод $R(\lambda_n, 1)$, где $\Delta\lambda_n / \lambda_{n+1} \to 0$, $n \to \infty$, такой, что $|A| \supset |R(\lambda_n, 1)|$. *М. Д. Калашников*

4833. О представимости методов суммирования посредством матричных преобразований. Целлер (Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen. Zeller K.), Math. Z., 1953, 59, № 3, 271—277 (нем.)

Последовательность $\{x_k\}$ называется $\overline{C}_1^{(q)}$-сходящейся к значению x, если

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |x_k - x|^q \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Последовательность $\{x_k\}$ называется суммируемой матрицей $A = \|a_{nk}\|$, если существуют $y_n = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $\lim y_n$ $(n \to \infty)$.

Теорема 1. При $0 < q < 1$ $\overline{C}_1^{(q)}$-метод не равносилен никакому A-методу; при $q \geqslant 1$ $\overline{C}_1^{(q)}$-метод равносилен некоторому A-методу (разобраны случаи $q = 1$, $q = 2$).

Первая часть теоремы была доказана ранее (Kuttner B., J. London Math. Soc., 1946, 21, 118—122). Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество тех последовательностей, которые преобразуются матрицей A в нуль-последовательности.

Теорема 2. Пусть матрицы $A^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ обладают свойствами:

а) $A^{(i)}$ регулярные и совершенные,

б) $\mathfrak{A}^{(i)} \supseteq \mathfrak{A}^{(i+1)}$ $(i = 0, 1, \ldots)$,

в) для любой последовательности $\delta_k \nearrow \infty$ (медленно растущей) и любого j найдется последовательность $\mathfrak{X} = \{x_k\}$ такая, что

$$\mathfrak{X} \notin \bigcap \mathfrak{A}^{(i)}, \ \mathfrak{X} \in \mathfrak{A}^{(j)}, \ x_k = O(\delta_k).$$

При этих условиях не существует матрицы A такой, чтобы

$$\mathfrak{A} = \bigcap \mathfrak{A}^{(i)}.$$

Теорема 2 применяется к «пересечению» методов суммирования Чезаро. *М. П. Щеглов*

4834. Достаточное условие для того, чтобы регулярная матрица суммировала ограниченную расходящуюся последовательность. Троппер (A sufficient condition for a regular matrix to sum a bounded divergent sequence. Tropper A.

M a r y), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 671—677 (англ.)

Доказывается следующая теорема:

Пусть A — нормальная регулярная матрица. Если 1) матрица A^{-1} нерегулярная и 2) имеется нормальная матрица B, у которой столбцы являются сходящимися к нулю последовательностями, причем $\|B\| < \infty$, $\|A^{-1}B\| = \infty$ и почти все столбцы матрицы $A^{-1}B$ образуют ограниченные последовательности, то существует ограниченная расходящаяся последовательность, суммируемая матрицей A.

Как следствие этой теоремы, легко устанавливается другая теорема: если нормальная регулярная матрица A такая, что 1) матрица A^{-1} нерегулярная и 2) почти все столбцы матрицы A^{-1} являются ограниченными последовательностями, то существует ограниченная расходящаяся последовательность, суммируемая матрицей A.

Условие 1) этих теорем необходимо для того, чтобы существовала ограниченная расходящаяся последовательность, которая суммировалась бы нормальной матрицей A. Следует указать, что для нормальной регулярной матрицы A условие 1) эквивалентно условию 1′): $\|A^{-1}\| = \infty$ (устанавливая вторую из вышеизложенных теорем, автор показала, что из 1) следует 1′); обратное следует из необходимости условия $\|A^{-1}\| < \infty$ для регулярности матрицы A^{-1}). Поскольку для любой регулярной матрицы A^* можно указать эквивалентную ей, по отношению к суммированию ограниченных последовательностей, нормальную регулярную матрицу A, то вышеизложенные теоремы могут быть использованы при исследовании произвольных регулярных матриц. *В. М. Даревский*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4835. Заметка о некоторых уравнениях, связанных с функциями Гегенбауэра. Б а г ч и, М у к х е р д ж и (Note on certain equations connected with Gegenbauer functions. B a g c h i H a r i D a s, M u k h e r j i B h o l a N a t h), Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1952, 6, № 3—4, 281—290 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Функцией Гегенбауэра 1-го рода авторы называют ультрасферический многочлен

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)\,\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\,\Gamma(n + \lambda + 1/2)} \times$$
$$\times (1 - x^2)^{-\lambda + 1/2} \frac{d^n (1 - x^2)^{n + \lambda - 1/2}}{dx^n}$$

(по поводу этого термина см. Я. Л. Геронимус, Теория ортогональных многочленов, М.—Л., 1950, 28). Функцией Гегенбауэра 2-го рода в работе назван интеграл

$$Q_n^{(\lambda)}(x) = (x^2 - 1)^{-\lambda + 1/2} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{\lambda - 1/2} \times$$
$$\times \frac{P_n^{(\lambda)}(t)}{x - t}\, dt .$$

Обе эти функции удовлетворяют соотношениям

$$(n + 1) f_{n+1}(x) = 2(n + \lambda) x f_n(x) -$$
$$- (n - 1 + 2\lambda) f_{n-1}(x) , \qquad (1)$$

$$f'_{n+1}(x) - f'_{n-1}(x) = 2(n + \lambda) f_n(x) , \qquad (2)$$

$$(1 - x^2) f'_n(x) = (2\lambda + 1) x f'_n(x) -$$
$$- n(n + 2\lambda) f_n(x) , \qquad (3)$$

и еще трем другим (4—6), приводимым в работе. Доказывается, что любая четверка этих соотношений есть следствие пары соотношений (1—2), а также пары (1—3), и отмечается без доказательства, что вообще все соотношения (1—6) вытекают из любой из 15 пар этих соотношений. Показывается, что функция

$$f_n(x) = a P_n^{(\lambda)}(x) + b Q_n^{(\lambda)}(x)$$

есть общий вид всех решений системы (1—6).

В конце работы вычисляются некоторые простые интегралы, содержащие функции $P_n^{(\lambda)}(x)$.

И. П. Натансон

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4836. Неоднородная сплошная балка. Ц я н ь В э й - ч ж а н (不均等的連續樑. 錢偉長), 物理學報 (Ули сюэбао, Acta Phys. sinica), 1953, 9, № 3, 170—182 (кит.; резюме англ.)

Автор предлагает способ решения системы уравнений трех моментов, из которой, как известно, определяются опорные моменты неразрезной балки, лежащей на жестких опорах. При этом рассматривается самый общий случай, когда длины пролетов, моменты инерции сечений и их модули упругости изменяются произвольно. Математически задача сводится к решению системы реккурентных уравнений $M_x - p_x M_{x-1} - q_x M_{x-2} = F_x$ $(x = 2,3,..,n)$, где M_x — опорный момент на опоре номер x, коэффициенты p_x, q_x — известные функции от длин пролетов, моментов инерции опорных сечений и их модулей упругости, а F_x — так называемые «грузовые» члены.

В основе предлагаемого способа лежит известная связь между трехчленными уравнениями и цепными дробями.

Автор сначала показывает, что два линейно-независимых решения α_x и β_x однородного уравнения $M_x - p_x M_{x-1} - q_x M_{x-2} = 0$ могут быть найдены как числитель и знаменатель цепной дроби $\frac{\beta_x}{\alpha_x} = \frac{q_2}{p_2 +} \; \frac{q_3}{p_3 +} \cdots \frac{q_x}{p_x}$ $(x = 2,3,\ldots,n)$, причем начальные значения определяются так: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$. Имея общее решение $M_x = P\alpha_x + Q\beta_x (x=0,1,\ldots,n)$ однородного уравнения, в котором P и Q — произвольные постоянные, автор далее применяет прием, подобный методу вариации произвольных постоянных в дифференциальных уравнениях и, варьируя P и Q, находит частное решение системы уравнений трех моментов:

$$M_x = \sum_{i=1}^{x} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \cdot \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}} \quad (x = 1,2,\ldots n),$$

$M_0 = 0$. После этого общее решение системы уравнений трех моментов запишется в виде $M_0 = Q$,

$$M_x = P\alpha_x + Q\beta_x + \sum_{i=1}^{x} \frac{F_{i+1}}{q_{i+1}} \cdot \frac{\beta_i \alpha_x - \alpha_i \beta_x}{\beta_i \alpha_{i-1} - \alpha_i \beta_{i-1}}$$

($x = 1,2, \ldots, n$), где постоянные P и Q определяются из условий закрепления балки на ее концах. В статье приведены числовые примеры.

А. П. Шварцман

4837. Как найти иррациональные числа в геометрии и вычислить их с помощью алгоритма Евклида. Барбэлат (Cum apar unele numere iraţionale in geometrie şi despre calculul lor cu ajutorul algoritmului lui Euclid. Barbălat Ion), Rev. mat., şi fiz., 1954, 5, № 2, 29—36 (рум.)

4838 К. Числовые ряды, ряды Фурье. Гомес (Séries numéricas, séries de funções de Fourier. Gomes Alvércio Moreira, X + +200 p. mimeogr., Faculdade nacional de filosofia, Rio de Janeiro, 1953, Cr. 80.00 doll.), Bol. bibliogr. brasileiro, 1953, 1, № 5, 8 (библ.)

4839 К. Математика. Том. I, ч. 2. Брейха (Matematika I. (díl), 2. část. Brejcha Josef, I vyd., (2) 180 s., SPN, Praha, 1953, 20.70 Kčs), Česká kniha, 1953, № 56, 1193 (библ.)

4840 РЕЦ. Математические методы для естествоиспытателей и инженеров. Смит (Mathematical methods for scientists and engineers, Smith L. P., 453 pp., Prentice-Hall, 1953, 13.35 doll.) [**Рецензия: Стюарт** (Stewart R. M.), Jet. Propuls., 1954, 24 № 1, 51 (англ.)]

4841 РЕЦ. Бесконечность и непрерывность. Тояма (無限と連続. 遠山啓), 岩波新書 (Изд-во Иванами синсе, 1952, 100 иен) [**Рецензия: Яно** (矢野健太郎), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 1, 56—57 (япон.)]

См. также: 4718, 4790, 4819, 4823, 4843, 4867

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4842. О двунормовой сходимости. Алексевич (On the two-norm convergence. Alexiewicz Andrzej), Studia math., 1953, 14, № 1, 49—56 (англ.)

Пусть X — пространство типа F с нормой $|x|$. Допустим, что в пространстве X определена другая норма $|x|^*$ такая, что $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ влечет за собой $\lim_{n\to\infty} |x_n|^* = 0$.

Мы говорим, что последовательность x_n сходится двунормово к x_0, если последовательность x_n ограничена относительно нормы $|x|$ и если $|x_n - x_0|^* \to 0$.

Пространство X с двунормовой сходимостью является пространством Фреше типа L^*, причем операции сложения элементов и умножения на скаляр непрерывны. Если двунормовая сходимость метризуема, то она равносильна сходимости, которая определяется нормой $|x|$. Если X является пространством типа B или типа B_0 (Банах С. С., Курс функціонального аналізу. Радянська школа, Київ, 1948, 199) с нормой $|x|$, то любое из приведенных ниже условий необходимо и достаточно для того, чтобы двунормовая сходимость была равносильна сходимости, определенной при помощи некоторой нормы:

(a) $|x_n|^* \to 0$ влечет за собой ограниченность последовательности x_n относительно нормы $|x|$;

(b) нормы $|x|$ и $|x|^*$ равносильны.

(c) пространство X полно по норме $|x|^*$.

Автор приводит примеры пространств с двунормовой сходимостью (пространство M_γ с нормой $|x|^*$ из пространства L, пространство L_γ с нормой $|x|^*$ из пространства S, пространство L^2_γ с нормой $|x|^*$ из пространства L, пространство V_γ с нормой $|x|^*$ из пространства M) и приводит вид линейных функционалов в этих пространствах.

Затем автор приводит достаточное условие того, чтобы пределом последовательности линейных операторов в смысле двунормовой сходимости был линейный оператор.

Часть результатов, касающихся двунормовой сходимости, автор опубликовал в своей прежней работе (Studia math., 1950, 11, 200—236).

L. Włodarski

4843. О некоторых теоремах Хана, Банаха и Штейнхауса. Сарджент (On some theorems of Hahn, Banach and Steinhaus. Sargent W. L. C.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 112, 438—451 (англ.)

Пусть $\{T_n\}$ — последовательность линейных операторов, отображающих банахово пространство E в линейное нормированное пространство F. Как показали Хан, Банах и Штейнхау (Banach S., Steinhaus H., Fund. Math., 1927, 9, 57; Банах, Курс функціонального аналізу, Радянська школа, Київ, 1948, 68), условия

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|T_n(x)\| < \infty \quad \text{для каждого } x \in E$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|T_n\| < \infty$$

равносильны. Этот результат непосредственно переносится на тот случай, когда E — линейное нормированное пространство второй категории.

В работе приводится дальнейшее обобщение этой теоремы. Линейное нормированное пространство E называется α- или β-пространством в зависимости от того, можно или нет представить его в виде суммы $\overset{\infty}{\underset{1}{U}} E_n$ подмножеств, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $0 \in E_1$; 2) если $x, y \in E_n$, то $x + y$; $x - y \in E_{n+1}$ ($n = 1,2, \ldots$); 3) всякое E_n нигде не плотно в E.

Для линейных операторов, отображающих β-пространство в линейное нормированное пространство F, справедливы:

Теорема 1. Условия: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| T_n(x) \| < \infty$ для каждого $x \in E$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| T_n \| < \infty$ равносильны.

Теорема 2. Множество всех $x \in E$, для которых $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| T_n(x) \| < \infty$ тождественно с E или является его α-подпространством.

Теорема 3. Если пространство F полно, то для того, чтобы $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \| T_s(x) - T(x) \| = 0$ $(0 \leqslant s < \infty)$ всюду в E, необходимо и достаточно, чтобы это соотношение выполнялось на плотном подмножестве из E и чтобы $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} \| T_s \| < \infty$.

Теорема 4. Если для аддитивного оператора T норма $\| T(x) \|$ полунепрерывна снизу в E, то T ограничен.

Теоремы 2, 3 и 4 также являются обобщением аналогичных известных результатов Банаха и Штейнхауса (Банах, Курс функціонального аналізу, Рад. Школа, Київ, 1948, 68, 67; Banach S., Steinhaus H., Fund. Math., 1927, 9, 53, 55).

М. А. Рутман

4844. Операторные ортогональные многочлены и приближенные методы определения спектра линейных ограниченных операторов. Воробьев Ю. В., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1, 83—90

С помощью операторных многочленов решается следующая ограниченная проблема моментов в гильбертовом пространстве H. Пусть в H заданы $n+1$ линейно независимых элементов $z_0, z_1, \ldots, z_n$, причем $(z_i, z_k) = s_{i+k}$ $(i, k = 0,1, \ldots, n)$. Через H_n обозначается подпространство, порождаемое элементами $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, v_n — проекция z_n в H_n. Требуется построить самосопряженный оператор B_n, определенный в H_n, такой, что

$$z_k = B_n^k z_0 (k = 0,1, \ldots, n-1); \quad v_n = B_n^n z_0 .$$

Решение этой проблемы моментов используется для приближенного построения спектральной функции ограниченного самосопряженного оператора. Именно, пусть A—ограниченный самосопряженный оператор в H, $z_0 \in H$ и $z_k = A^k z_0$, причем все z_k линейно независимы. Берем оператор B_n, построенный выше по $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Доказывается, что $E_\lambda^{B_n} z_0$ сильно сходится к $E_\lambda^A z_0$ при $n \to \infty$. Если же z_n линейно выражается через $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$, то в H_n операторы B_n и A совпадают. Затем дается приложение решения проблемы моментов к нахождению наибольшего собственного значения и соответствующего собственного элемента ограниченного самосопряженного оператора. При этом не вполне ясно утверждение автора о том, что предлагаемый им метод дает наибольшую точность по сравнению с другими известными методами.

Автор указывает, что его метод является обобщением метода наискорейшего спуска Л. В. Канторовича (Успехи матем. наук, 1946, 3, № 6, 89—185), а при $n = 2$ совпадает с последним. Аналогичное обобщение, но в несколько иной форме, дано М. Ш. Бирманом (Зап. Ленингр. горного ин-та, 1952, 27, № 1, 209—216). *Б. З. Вулих*

4845. Спектры и спектральные многообразия. Халмош (Spectra and spectral manifolds. Halmos Paul R.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 43—49 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Спектр ограниченного нормального оператора A на инвариантном подпространстве $\mathfrak{I}$ содержится в спектре этого оператора на наименьшем приводящем A подпространстве, содержащем $\mathfrak{I}$. По спектральной теореме A определяет спектральную меру, относящую каждому борелевскому множеству M точек комплексной плоскости оператор проектирования на подпространство $\mathfrak{E}(M)$, приводящее A. $\mathfrak{E}(M)$ есть замкнутая линейная оболочка совокупности всех инвариантных подпространств, на которых спектр A содержится в M.

Д. А. Райков

4846. Улучшенные оценки сходимости и погрешности в теории возмущений. Шефке (Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung. Schäfke Friedrich Wilhelm), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 8/9, 255—259 (нем.)

H — комплексное векторное пространство (возможно, неполное), U и U^* — два его линейных подмножества. Линейные операторы F и F^* определены соответственно на U и U^* и удовлетворяют условию $(Fu, v) = (u, F^* v)$ при $u \in U$, $v \in U^*$. Линейный оператор G определен на U и удовлетворяет при всех $u \in U$ оценке $\| Gu \| \leqslant \varphi(\| u \|, \| Fu \|)$.

Непрерывная функция $\varphi(x, y)$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ положительна при $x > 0, y > 0$ и удовлетворяет условиям: $\varphi(x_1, y_1) \leqslant \varphi(x_2, y_2)$ $(x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2)$, $\varphi(tx, ty) = t\varphi(x, y)$ $(t > 0)$.

Рассматривается задача о собственных значениях оператора $F + \mu G$ (μ — параметр) в следующих предположениях:

А. Собственные значения λ оператора $F + \mu G$ определяются характеристическим уравнением $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ (или $\Delta(1/\lambda, \mu) = 0$, $\lambda \neq 0$), где $\Delta(\xi, \eta)$ — целая функция переменных ξ, η.

Б. Существует не более чем счетное множество собственных значений конечной кратности λ_n и соответствующих собственных элементов u_n оператора F. Уравнение $F^* u_n^* = \overline{\lambda}_n u_n^*$ $(u_n^* \in U^*)$ имеет нетривиальное решение. Элементы u_n, u_n^* образуют биортогональную систему. Существуют числа $0 < \beta \leqslant \alpha$ такие, что для любого $f \in H$

$$\beta^2 \sum_n |(f, u_n^*)|^2 \leqslant (f, f) \leqslant \alpha^2 \sum_n |(f, u_n^*)|^2 .$$

Теорема. Пусть $d_m = \inf\limits_{\lambda_n \neq \lambda_m} |\lambda_m - \lambda_n|$, $D_m = \max\limits_{\lambda} \sup\limits_{n} |\lambda_n/(\lambda - \lambda_n)|$ при $|\lambda - \lambda_m| = d_m/2$, $\rho_m = (\beta/\alpha)[\varphi(2/d_m, D_m)]^{-1}$.

Если λ_m является простым корнем характеристического уравнения при $\mu=0$, то при $|\mu|<\rho_m$ характеристическое уравнение имеет решение в виде сходящегося степенного ряда

$$\lambda_m(\mu)=\lambda_m=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_m^{(k)}\mu^k.$$

При этом $|\lambda_m(\mu)-\lambda_m|<d_m/2$, и при $|\mu|<\rho_m$ нет других собственных значений оператора $F+\mu G$, удовлетворяющих условию $|\lambda-\lambda_m|<d_m/2$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_m^{(k)}|^2\rho_m^{2k}\leqslant d_m^2/4$$

и

$$\left|\lambda_m(\mu)-\lambda_m-\sum_{k=1}^{l}\lambda_m^{(k)}\mu^k\right|\leqslant$$

$$\leqslant(|\mu|/\rho_m)^{l+1}\left\{(0{,}25d_m^2-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{l}|\lambda_m^{(k)}|^2\rho_m^{2k}\right)\Big/(1-|\mu|^2\rho_m^{-2})\Big\}^{1/2}.$$

Автор указывает, что возможно перенесение теоремы на случай, когда λ_m является кратным корнем характеристического уравнения, и ссылается в связи с этим на свою предыдущую работу (Math. Nachr., 1951, 6, 109—124).

Отмечается возможность применения приведенных результатов к задачам о собственных значениях матриц, интегральных уравнений Фредгольма и обыкновенных дифференциальных уравнений. На примере дифференциального уравнения Матье автор сопоставляет свои результаты с результатами Редлиха, Надь и Шрёдера. *М. Ш. Бирман*

4847. О голоморфных ограниченных матрицах-функциях с определителем, тождественно равным нулю. Шмульян Ю. Л., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 4, 625—627

Приводится ряд результатов (часть из них — без доказательств) относительно голоморфных функций $w(\zeta)$, $|\zeta|<1$, значениями которых служат линейные операторы, отображающие некоторое гильбертово пространство H на его конечномерные подпространства; при этом $\|w(\zeta)\|\leqslant 1$. Можно показать, что $\sup\dim w(\zeta)H=r<\infty$. Устанавливается, что $w(\zeta)=w_1(\zeta)w_2(\zeta)$, где $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ голоморфны при $|\zeta|<1$, $\|w_j(\zeta)\|\leqslant 1$ $(j=1,2)$ и $w_2(\zeta)$ отображает H на не зависящее от ζ r-мерное подпространство H_r, а $w_1(\zeta)$ отображает H_r на $w(\zeta)H$. Применяя этот факт к операторным функциям, действующим в конечномерном пространстве H, автор приходит к обобщению теоремы, установленной В. П. Потаповым (Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 5, 849—852), о разложении матричной функции рассматриваемого вида с условием $\det w(\zeta)\neq 0$ в произведение $B(\zeta)\omega(\zeta)$, где $B(\zeta)$ — матричное произведение Бляшке, а $\det\omega(\zeta)\neq 0$ $(|\zeta|<1)$. Обобщение заключается в освобождении от условия $\det w(\zeta)\not\equiv 0$; при этом характер разложения изменяется.

При доказательстве теоремы 2 допущены некоторые неточности, а именно оператор $v_1^*(\zeta)v_1(\zeta)$ не имеет обратного (поэтому следует рассматривать часть оператора $v_1^*(\zeta)v_{1,}(\zeta)$, действующую в H_r). *Ю. М. Березанский*

4848. Операторы с вырожденной характеристической функцией. Шмульян Ю. Л., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 985—988

Пусть V — изометрический оператор с индексом дефекта (m, m), где $m<\infty$.

Исследуется строение ортогональных расширений T оператора V с нормой $\|T\|\leqslant 1$, характеристическая функция которых имеет определитель $\equiv 0$ (при некоторой матричной реализации). Такая характеристическая функция называется вырожденной. Этот случай имеет место, если каждая точка, лежащая внутри единичного круга, является собственным числом оператора T. Основной результат: при указанных условиях оператор T имеет инвариантное подпространство, в котором индуцированный оператор T_1 является ортогональным расширением изометрического оператора V_1 с индексом дефекта (m, n), где $m>n$. Теорема остается справедливой и в том случае, когда оператор V имеет индекс дефекта (m, p), где $m\neq p$.

Работа содержит также несколько предложений об изометрических операторах с произвольными индексами дефекта. Для них вводятся понятия нормированной характеристической функции, сцепления операторов и устанавливается теорема о характеристической функции сцепления (теорема умножения), обобщающая результат М. С. Лившица и В. П. Потапова (Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 4, 625—628).

Отметим, что формулируемая автором теорема об условиях представимости изометрического оператора в виде ортогональной суммы максимальных изометрических операторов легко вытекает из одного результата референта (Докл. АН СССР, 1949, **67**, 611—614). *А. В. Штраус*

4849. Координатные линейные пространства. Купер (Coordinated linear spaces. Cooper J. L. B.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, № 11, 305—327 (англ.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — булева алгебра, и $\{L\}$ — некоторая совокупность мер (положительных вполне аддитивных функций (в. а. ф.)) на $\mathfrak{R}$. Совокупность $\mathfrak{M}$ конечных пересечений подмножеств $\mathfrak{R}$, определяемых неравенствами $L(a)<\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $L\in\{L\}$, называется регулярной сетью. Множества регулярной сети принимаются за полную систему окрестностей нуля в $\mathfrak{R}$. В. а. ф. называется абсолютно непрерывной $\mathfrak{M}$, если она непрерывна в этой топологии. Координатным пространством относительно счетно полной булевой алгебры $\mathfrak{R}$ и сети $\mathfrak{M}$ называется линейное пространство E, для которого определены: а) множество дистрибутивных операторов, изоморфное $\mathfrak{R}$, б) такое упорядочивание, что из $0<y<x$ следует $\lambda y<\lambda x$ при $\lambda>0$ и $ay<ax<x$ при всех $a\in\mathfrak{R}$, в) такое дуальное пространство E', что 1) из $(x, x')=0$ для всех $x'\in E'$ следует, что $x=0$; 2) для всех $x'\in E'$ и $x\in E$ (x', ax), как функция от a является абсолютно непрерывной $\mathfrak{M}$ в. а. ф., а (x', y) ограничено, когда $0<y<x$ ((x', y) — значение функционала x' для элемента y); 3) E' со-

держит все дистрибутивные функционалы, удовлетворяющие 2); 4) сеть, порожденная функциями (x', ax), совпадает с $\mathfrak{M}$; 5) если $0 < y_i < x$, $c_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\sum c_i \leqslant 1$, то существует y, являющееся слабым пределом $\sum c_i y_i$. Примерами координатных пространств являются последовательностные пространства Кёте и Теплица, L^p — пространства и некоторые пространства, встречающиеся в теории непрерывных сумм банаховых пространств. Множество D из E' называется ограниченным, если $(x)_D \equiv \sup \{ | (x', x) | : x' \in D\}$ конечно для всех x. Задавая некоторую совокупность ограниченных множеств в E', можно ввести топологию в E с помощью совокупности псевдонорм $(x)_D$. Слабой топологией будет топология, при которой $\{D\}$ состоит из конечных множеств в E'. Если $\{D\}$ состоит из всех ограниченных множеств в E', то соответствующая топология называется строгой. Аналогичные определения вводятся для E. В слабой топологии E' последовательностно полно. Слабое последовательностное замыкание E содержится в E'' (втором дуальном к E). Если E рефлексивно, то оно слабо последовательностно полно. Множество $D \subset E'$ относительно слабо компактно тогда и только тогда, когда для любого x и любой убывающей последовательности $a_n \to 0$ элементов из $\mathfrak{R}$ $(a_n x)_D \to 0$. Положим $x \dashv y$, если для всех x' $\operatorname{var}(x', ax) \leqslant \leqslant \operatorname{var}(x', ay)$. Нормальной оболочкой множества S из E называется совокупность элементов x, таких что $x \dashv y$ для некоторого $y \in S$. Нормальная оболочка ограниченного множества ограничена, нормальная оболочка относительно слабо компактного множества из E' слабо компактна. E' полно в строгой топологии, если E рефлексивно и если из $0 < y < x$ следует $y \dashv x$. Даны приложения теории координатных пространств к теории интегральных уравнений. *Н. Я. Виленкин*

4850. Заметки об общем анализе. II. Симода (Notes on general analysis. II. Shimoda I s a e), J. Gakugei Tokushima Univ., 1953, **3**, 12—15 (англ.)

В статье изучаются аналитические функции, аргументы и значения которых лежат в комплексных банаховых пространствах. О таких функциях доказаны следующие теоремы: 1. Функция будет однородным многочленом степени n тогда и только тогда, когда она определена и аналитична во всем пространстве и однородна степени n. 2. (Обобщение леммы Шварца). Если $f(0) = 0$, f аналитична и $\| f(x) \| \leqslant M$, когда $\| x \| < R$, то $R \| f(x) \| \leqslant \leqslant M \| x \|$ при $\| x \| < R$. Здесь равенство может достигаться в некоторой точке, не достигаясь всюду. Сформулированы две более общие теоремы. Они касаются изучения границы максимального открытого множества, в котором сходится степенный ряд. Эта часть статьи не ясна для референта отчасти из-за отсутствия ясности в определении, отчасти из-за очевидного смешения между отсутствием сходимости степенного ряда в точке и отсутствием аналитического продолжения в окрестности этой точки. *A. E. Taylor*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 38

4851. Теория обобщенной сходимости и обобщенных функций и их применения в математической физике. Темпл (La théorie de la convergence généralisée et des fonctions généralisées et leurs applications à la physique mathématique. Temple G.), Univ. Roma ist. naz. alta mat. rend. mat. e appl., 1952, **11**, 111—122; Consiglio naz. ricerche Publ. ist. appl. calcolo, № 356, 1953 (франц.)

Краткое изложение теории распределений и некоторых их применений в физике. *L. Schwartz*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1071

4852 Д. Применение метода функционалов Фока к мезонным полям. Трлифай Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1953

См. также: 4775, 4784, 4788, 4807, 4814, 4917

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

853. Об устойчивых вероятностных законах с показателем меньшим единицы. Линник Ю. В., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 4, 619—621

Пусть $p(x; \alpha, \beta)$ обозначает плотность устойчивого закона с характеристической функцией

$$f(z) = \exp\left\{ -|z|^\alpha \left(1 + i\beta \operatorname{sign} z \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha\right)\right\}.$$

Как известно, при любом α $(0 < \alpha < 1)$ функция $p(x; \alpha, -1)$ равна нулю при $x \leqslant 0$, положительна при любом $x > 0$ и имеет в точке нуль производные всех порядков, равные нулю.

В теореме 1 решается поставленный А. Н. Колмогоровым вопрос об асимптотическом поведении плотности $p(x, \alpha, -1)$ для указанных значений α при $x \to +0$.

Теорема 1. При $x \to +0$

$$p(x; \alpha, -1) = Ax^m \exp\{-Bx^{-n}\}(1 + \Delta(x)),$$

где

$$A = \frac{\alpha^{1/2(1-\alpha)}}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha)^{1/2}} \left(\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)^{-1/2(1-\alpha)},$$

$$B = \alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)^{-1/(1-\alpha)},$$

$$m = -\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}, \qquad n = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

$$|\Delta(x)| \leqslant C(\varepsilon) x^{\alpha/2(1-\alpha)-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая константа и $C(\varepsilon)$ — ограниченная функция в любом замкнутом сегменте, не содержащем 0.

Аналитическую структуру этих плотностей поясняет

Теорема 2. При $x > 0$

$$p(x; \alpha, -1) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-k\alpha},$$

где c_k — действительные числа и ряд

$$Q(z)=\sum_1^\infty c_k z^k$$

всюду сходится и изображает целую функцию. Кроме того, при $\alpha=1/n$ находятся дифференциальные уравнения для некоторых функций, через которые просто выражаются плотности.

А. В. Скороход

4854. Локальная предельная теорема для плотностей. Гнеденко Б. В., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 1, 5—7

Пусть

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$$

— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$,

$$s_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{B_n}-A_n,$$

где A_n и $B_n>0$ — некоторые постоянные, $F_n(x)$ — функция распределения и $p_n(x)$ — плотность «нормированной суммы» s_n, $\Phi(x)$ — некоторая (устойчивая) функция распределения, $p(x)=\Phi'(x)$ — соответствующая плотность.

Устанавливается теорема 1: Для того чтобы при $n\to\infty$

$$\max_{-\infty<x<\infty}|p_n(x)-p(x)|\to 0, \qquad (1)$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) $F_n(x)\to\Phi(x)$,

2) существует такое n_0, что функция распределения суммы $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n_0}$ удовлетворяет условию Липшица.

Поскольку необходимые и достаточные условия сходимости $F_n\to\Phi$ хорошо известны, теорема 1 окончательно решает вопрос о сходимости (1) плотностей сумм одинаково распределенных слагаемых к плотности предельного закона.

Для случая нормального предельного распределения $\Phi(x)$ формулируется.

Теорема 2. Если величины ξ_k обладают моментами порядка $k\geqslant 3$, то в условиях теоремы 1 имеет место асимптотическое разложение

$$p_n(x)=\varphi(x)+\sum_{s=1}^{k-2} n^{-(s/2)}P_s(-\varphi)+o(n^{-(k-2)/2}).$$

Определение функций $P_s(-\varphi)$ см., например, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.-Л., 1949. *Ю. В. Прохоров*

4855. Замкнутые классы, берущие начало в теории вероятностей. Бохнер (Closure classes originating in the theory of probability. Bochner S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 10, 1082—1088 (англ.)

В дальнейшем α означает точку $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ евклидова пространства E_k, $|\alpha|=(\alpha_1^2+\ldots+\alpha_k^2)^{1/2}$, $(\alpha,x)=\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_kx_k$. Последовательность непрерывных функций $\varphi(\alpha)$ «сходится (P)» к функции $\varphi(\alpha)$, если соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\alpha)=\varphi(\alpha)$$

имеет место равномерно в любой области вида $|\alpha|<A_0$. Отсюда ясен смысл таких понятий, как «предел (P)», «замкнутость (P) семейства функций», «(наименьшее) замыкание (P) данного семейства функций» и т. п.

Из теории вероятностей (теория характеристических функций и безгранично делимых законов) известно, что класс функций

$$\varphi(\alpha)=\int_{E_k}e^{i(\alpha,x)}dF(x),$$

где

$$F(A)\geqslant 0,\quad F(E_k)=\int_{E_k}dF(x)<+\infty$$

есть замкнутое (P) семейство функций. Класс разностей

$$\psi(\alpha)=\varphi(0)-\varphi(\alpha)=\int_{E_k}[1-e^{i(\alpha,x)}]\,dF(x)$$

не является замкнутым (P); его замыканием (P) служит совокупность функций вида

$$iL(\alpha)+Q_2(\alpha)+\int_{|x|>0}\left[1-e^{i(\alpha,x)}+\frac{i(\alpha,x)}{1+|x|^2}\right]dF(x),$$

где

$$\int_{|x|>0}\frac{|x|^2}{1+|x|^2}\,dF(x)<+\infty$$

и где $L(\alpha)$ — линейная, а $Q_2(\alpha)$ — неотрицательная квадратичная форма переменных $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$. Подобным же образом для вещественных функций

$$\psi(\alpha)=\int_{E_k}[1-\cos(\alpha,x)]\,dF(x)=$$

$$=2\int_{E_k}\left[\sin\frac{(\alpha,x)}{2}\right]^2dF(x)$$

замыкание (P) состоит из функций вида

$$\psi(\alpha)=Q_2(\alpha)+2\int_{|x|>0}\left[\sin\frac{(\alpha,x)}{2}\right]^2dF(x).$$

Все эти утверждения и формулы с чисто аналитической точки зрения служат частными случаями более общих закономерностей, наиболее важной из которых автор считает следующую.

Теорема. 1) Для любого натурального числа m совокупность функций вида

$$\psi(\alpha)=Q_{2m}(\alpha)+\int_{|x|>0}[\sin(\alpha,x)]^{2m}\,dF(x) \qquad (1)$$

образует замкнутое (P) семейство. При этом $F(A)$ есть любая функция множества, определенная на

$E_k - (0)$, для которой написанный интеграл существует и является непрерывной функцией от α; $Q_{2m}(\alpha)$ есть любой вещественный неотрицательный однородный многочлен степени $2m$ относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

2) Класс функций

$$\int\limits_{|x|>0} [\sin(\alpha, x)]^{2m} dF(x)$$

не образует замкнутого (P) семейства. При $m=1$ его замыканием (P) служит все семейство (1). При $m \geqslant 2$ его замыкание (P) составляет такие функции вида (1), в которых $Q_{2m}(\alpha)$ является пределом (P) линейных комбинаций вида

$$\sum_{p=1}^{r} \gamma_p [\delta_{p1}\alpha_1 + \ldots + \delta_{pk}\alpha_k]^{2m},$$

где $\gamma_p \geqslant 0$.

3) Для данной функции $\psi(\alpha)$ многочлен $Q_{2m}(\alpha)$ и значение интеграла в формуле (1) определяется однозначно.

Основным содержанием статьи служит полное доказательство этой теоремы. *А. Я. Хинчин*

4856. О применении метода Маркова к задаче многократных потерь. Чавчанидзе В. В., Ж. эксперим. и теор. физики, 1954, 26, № 2, 179—184

Рассматривается частица, проходящая через вещество и испытывающая потери энергии при столкновении с атомами вещества. Потеря энергии Δ_n за n столкновений может быть представима в виде $\Delta_n = \sum_1^n \varepsilon_i$, где ε_i — потеря энергии при i-ом столкновении. Предполагается, что ε_i независимы и одинаково распределены с плотностью $\tau(\varepsilon)$. Для определения плотности $W_n(\Delta)$ величины Δ_n применяется метод характеристических функций. Для больших n предлагается приближенная формула

$$W_n(\Delta) \approx W(\Delta \mid t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i\rho\Delta + \frac{t}{l} \int\limits_0^{\infty} (e^{-i\rho\varepsilon} - 1)\tau(\varepsilon)\, d\varepsilon \right\} d\rho,$$

где t — толщина слоя вещества, l — средний свободный пробег. Указывается на затруднения, возникающие в случаях, когда вместо плотности $\tau(\varepsilon)$ приходится пользоваться неинтегрируемой функцией (например, функцией вида a/ε^2). В последних случаях предлагается устранять расходимости урезыванием интервала интегрирования.

Примечание референта. Выражение для $W(\Delta \mid t)$, когда оно имеет смысл, представляет собой частный случай плотности безгранично делимого распределения. Использование более общих безгранично делимых распределений позволяет рассматривать и случай расходимостей. *И. И. Гихман*

4857. Метод Маркова и задачи о флуктуациях энергетических потерь при кратных столкновениях. Чавчанидзе В. В., Ж. эксперим. и теор. физики, 1954, 26, № 2, 185—188

Рассматривается обобщение задачи предыдущей статьи автора (см. реф. 4856) на тот случай, когда плотность распределения $\tau(\varepsilon, E_{i-1})$ потери энергии ε_i в i-ом столкновении зависит от энергии частицы непосредственно перед столкновением. Чтобы иметь возможность применить метод характеристических функций, автор предлагает заменить в выражении для $\tau(\varepsilon, E_{i-1})$ случайную величину E_{i-1} ее математическим ожиданием. При большом числе столкновений n и малых ε_i предлагается «адиабатическое приближение»

$$W_n(\Delta) \approx W(\Delta \mid t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -i\rho\Delta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\infty} \left(\ln \int\limits_0^{\infty} e^{i\rho\varepsilon} \tau(\varepsilon, \overline{E}_t)\, d\varepsilon \right) \frac{dt}{l(t)} \right\} d\rho,$$

где t — глубина слоя вещества, $l(t)$ — средний свободный пробег, $\overline{\varepsilon}(t) = \int\limits_0^t \varepsilon\tau(\varepsilon, t)\, d\varepsilon$ — средняя потеря энергии при одном столкновении на глубине t и $\overline{E}_t = E_0 - \int\limits_0^t \overline{\varepsilon}(t)\, dt$. Предельные теоремы, которые могут служить обоснованием приближенных формул, в работе не доказываются. *И. И. Гихман*

4858. Случайные функции, гармонические в полуплоскости. Кампе-де-Ферье (Fonctions aléatoires harmoniques dans un demi-plan. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 25, 1632—1634 (франц.)

Рассматривается вопрос о решении задачи Дирихле для полуплоскости в предположении, что граничные значения $f(x)$ на оси Ox являются случайной функцией: $f(x) = f(x, \omega)$, где ω — элемент множества Ω элементарных событий с заданной на этом множестве вероятностной мерой μ. Случайная функция $f(x, \omega)$ называется принадлежащей классу H, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) функция $f(x, \omega)$ измерима на $R \times \Omega$, где R — прямая $-\infty < x < \infty$ с заданной на ней лебеговой мерой m, относительно $m \times \mu$; 2) $\gamma(x) \equiv \equiv M|f(x)| \equiv \int\limits_{\Omega} |f(x, \omega)|\, d\mu < \infty$ при всех x; 3) $\gamma(x) \in L[a, b]$ для любого конечного интервала $[a, b]$; 4) $\int\limits_0^x \gamma(\xi)\, d\xi = O(|x|^{\alpha})$, $0 \leqslant \alpha < 2$ при $|x| \to \infty$.

В качестве примера функции $f(x, \omega)$ класса H приводится функция Винера, схематически представляющая одномерное броуновское движение частицы, лишенной инерции.

Основным результатом заметки является следующая теорема:

Если $f(x, \omega)$ — случайная функция класса H, то интеграл Пуассона

$$u(x, y, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} f(\xi, \omega)\, d\xi$$

для почти всех значений ω (т. е. почти наверное) определяет гармоническую в полуплоскости $y > 0$ функцию, для которой

$$\lim_{y \to +0} u(x, y, \omega) = f(x, \omega) \quad \text{при почти всех } x.$$

Доказательство теоремы не приводится, однако основные этапы этого доказательства указаны. Отмечается, что если $f(x, \omega)$ есть стационарная (в широком смысле) случайная функция класса H, имеющая корреляционную функцию $r(\xi)$, то $Mu(x', y')$ и $(x'', y'') = \rho(x' - x'', y' + y'')$, где $\rho(x, y)$ — гармоническая в верхней полуплоскости функция, принимающая на оси Ox значения $r(x)$.

А. М. Яглом

4859. О применении понятия характеристической функции к изучению некоторых проблем статистической механики. Блан-Лапьер (Sur l'application de la notion de fonction caractéristique a l'étude de certains problèmes de mécanique statistique. Blanc-Lapierre André), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 25, 1635—1637 (франц.).

Пусть a_i означает число частиц, обладающих данной энергией ε_i. Основные расчетные задачи статистической механики сводятся к отысканию моментов различных порядков совокупности случайных величин a_i при заданных $N = \sum_i a_i$ (общее число частиц) и $\mathcal{E} = \sum_i a_i \varepsilon_i$ (полная энергия системы). Автор указывает возможность общего подхода к этой задаче методом характеристических функций. Пусть $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — характеристическая функция системы целочисленных случайных величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если ввести добавочные связи

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = S_1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i = S_2 \tag{1}$$

(где λ, μ, S — данные целые числа), то получается новая характеристическая функция $\Phi(u_1, \ldots, u_n; S_1, S_2)$, и основная задача состоит в выражении этой новой функции через прежнюю. Полагая

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(u_1 + \lambda_1 v + \mu_1 w, \ldots, u_n + \lambda_n v + \mu_n w)\, e^{-i(vS_1 + wS_2)}\, dv\, dw,$$

находим

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n; S_1, S_2) = \frac{F(u_1, \ldots, u_n)}{F(0, \ldots, 0)},$$

что в основном и решает поставленную задачу. Имея выражение характеристической функции для совокупности величин a_i, подчиненных связям (1), мы обычным путем находим нужные моменты. Затруднения, вызываемые тем, что в задачах статистической механики мы обычно имеем дело с бесконечным числом величин a_i и что априорные распределения этих величин не поддаются нормированию, преодолеваются с помощью соответствующих предельных переходов. Доказательства в статье отсутствуют.

А. Я. Хинчин

4860. Основные понятия математической теории страхования жизни. Свердруп (Basic concepts in life assurance mathematics. Sverdrup Erling), Skand. aktuarietidskr., 1952, 35, 115—131 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Автор излагает теоретико-вероятностные основания математической теории страхового дела. Основной случайной величиной в этой теории является возраст X человека к моменту смерти. Функция распределения случайной величины X обозначается через $G(x)$. Таким образом, $G(x)$ есть вероятность смерти лица не позднее, чем по достижении им возраста x лет. Автор рассматривает группу из N лиц и делает следующие предположения: (A) случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_N$ независимы и одинакового распределения с функцией распределения $G(x)$; (B) существует конечное число ω такое, что $G(\omega) = 1$. На основании этих предположений вводятся вероятности, используемые в математической теории страхового дела, и доказываются две теоремы, оправдывающие принцип эквивалентности. В заключение делаются предположения относительно применения статистических методов к оценке вероятности смерти и составления таблиц смертности.

E. Lukacs

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 774.

4861. Исправление опечаток (Errata), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 1, 178—179 (франц.)

К РЖМат, 1953, 1279

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4862. Об асимптотическом распределении критерия χ^2. Туманян С. Х., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 6, 1011—1012

Рассматривается выражение

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{s} (m_i - np_i)^2 / np_i,$$

где p_i — вероятности каждого из $s+1$ возможных исходов, а m_i — число появлений исхода с номером i при n независимых испытаниях. Пусть $F(x)$ — функция распределения величины χ^2. Известно, что если s и p_i $(i = 0, 1, \ldots, s)$ постоянны, то равномерно по x $F(x) \to K_s(x)$ $(n \to \infty)$ ($K_s(x)$ — нормированная неполная Г-функция с s степенями свободы). В свою очередь, равномерно по u, $K_s(s + u\sqrt{2s}) \to \Phi(u)$ $(s \to \infty)$, где $\Phi(u)$ — функция нормального распределения с параметрами (0,1). Обобщая эти результаты, автор устанавливает следующие теоремы:

1. Как бы ни изменялись одновременно n, s и p_i при условии $\min_{0 \leqslant i \leqslant s} np_i \to \infty$, равномерно по x имеет место соотношение $|F(x) - K_s(x)| \to 0$.

2. Если n, s, k и p_i $(i=0,1,\ldots,s)$ меняются одновременно так, что $s\to\infty$, $k/s\to 0$, а np_i для номеров $0\leqslant i\leqslant k$ остаются в пределах $0<c<np_i\leqslant C$, где c и C постоянны, для номеров же $i>k$ удовлетворяют условию $\min_{k<i\leqslant s} np_i\to\infty$, то равномерно по u $F(s+u\sqrt{2s})\to\Phi(u)$.

Доказательство этих теорем приведено в диссертации автора (РЖМат, 1953, 360 Д).

Л. Н. Большев

4863. О некоторых свойствах срединного уклонения. Гнеденко Б. В., Тр. Ин-та матем. и механики АН УзССР, 1953, **10**, № 1, 26—35

Исследуется эмпирическое срединное уклонение E_n системы величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. медиана величин $|x_i-\bar{x}|$. В предположении, что x_i независимы и подчинены нормальному распределению с параметрами (a,σ), находится точное распределение E_n и показывается, что асимптотически при $n\to\infty$ оно нормально с параметрами $(E, \sigma/(c\sqrt{n}))$, где $E=\alpha\sigma$ — теоретическое срединное отклонение $(\alpha\sim 0{,}674)$ и

$$c=4e^{-\alpha^2/2}.$$

Отсюда вытекает, что асимптотическая эффективность E_n как оценки E (или E_n/α как оценки σ) равна

$$\alpha^2 e^{-\alpha^2/2}\sim\frac{1}{(1{,}67)^2}.$$

Кроме того, отмечается, что при сделанных допущениях E_n независимо от $\bar{x}$, что, впрочем, как легко доказать, имеет место для любой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, инвариантной по отношению к замене переменных $x_i'=x_i+b$. *А. Н. Колмогоров*

4864. Оценка коэффициента корреляции в случае двумерной нормальной совокупности, когда одна из переменных дихотомизирована. Мариц (Estimation of the correlation coefficient in the case of a bivariate normal population when one of the variables is dichotomized. Maritz J. S.), Psychometrika, 1953, **18**, № 2, 97—110 (англ.)

Пусть x — случайная переменная, распределенная нормально $(0, 1)$, а y — случайная переменная, условная плотность распределения которой при данном x равна

$$p(y\mid x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-bx)^2\right].$$

Коэффициент корреляции между переменными x и y равен

$$\rho=\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Предлагается в качестве оценки для ρ использовать

$$G=\frac{\hat{b}}{\sqrt{1+\hat{b}^2}},$$

где $\hat{b}$ — оценка для b, способ нахождения, а также дисперсия которой указываются.

Утверждается, что оценка G всегда является состоятельной оценкой для ρ и более эффективной, чем обычно используемая оценка r. Высказывается предположение о нормальности распределения G.

С. Х. Туманян

4865. Поправки для приближенной замены биномиального распределения нормальным или χ^2. Рослер, Бейкер, Эймерин (Corrected normal and chi-square approximations to the binomial distribution in organoleptic tests. Roessler E. B., Baker G. A., Amerine M. A.), Food Res. (Chicago), 1953, **18**, № 6, 625—627 (англ.)

Вместо обычного приближенного равенства

$$P_n(m\geqslant x)=\sum_{m=x}^{n}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\sim 1-\Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

предлагаются следующие приближенные формулы:

а) $$P_n(m\geqslant x)\sim 1-\Phi\left(\frac{x-np-0{,}5}{\sqrt{npq}}\right),$$

б) $$P_n(m\geqslant x)\sim 0{,}5-0{,}5\,K_1\left[\frac{(x-np-0{,}5)^2}{npq}\right],\quad x-np-0{,}5>0.$$

Здесь Φ — функция нормального распределения с параметрами $(0,1)$, а K_1 — функция распределения χ^2 с одной степенью свободы. К работе приложены таблицы, из которых видно, что для $1/3\leqslant p\leqslant 2/3$ формулы а) и б) дают удовлетворительное приближение, начиная с $n=5$. *Л. Н. Большев*

4866. Критерии однородности двух выборок. Кришна-Ийер (Testing of two samples. Krishna-Iyer P. V.), Nature, 1953, **172**, № 4377, 553 (англ.)

Пусть имеются две выборки объема n из совокупности, элементы которой могут иметь значения признака, равные $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, соответственно.

Обозначим расположенные в порядке возрастания результаты первой выборки через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и второй — через $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Рассматриваются статистики

$$X=\sum_{r=1}^{n}|x_r-y_r|,$$

$$Y=\sum_{r=1}^{n}|x_r-y_r|+\sum_{r=1}^{n}|x_{r+1}-y_r|+\sum_{r=1}^{n}|x_r-y_{r+1}|.$$

Приводятся значения математических ожиданий и дисперсий этих статистик.

Указывается, что распределения X и Y асимптотически нормальны.

Указывается, далее, на возможность применения полученных результатов для решения вопроса о том, происходят ли две выборки (не слишком

малого) объема n из одной и той же совокупности указанного выше вида с неизвестными p_h.

С. Х. Туманян

4867. О зависимости между комбинаторным и степенным средним. Мардессич (Sulle relazioni fra medie combinatorie e medie potenziate. Mardessich Bartolo), Statistica, Bologna, 1953, **13**, 77—85 (итал.)

Даны n величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через $S_{k_1k_2k_3}$ симметрическую функцию третьего порядка

$$S_{k_1k_2k_3} = a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_4^{k_3} + \cdots + a_{n-2}^{k_1} a_{n-1}^{k_2} a_n^{k_3}$$

и аналогично через $S_{k_1, k_2, \ldots, k_s}$ — симметрическую функцию s-го порядка. Если $k_1 = k_2 = \cdots = k_i = k$, то $S_{\underbrace{k, k, \ldots, k}_{i \text{ раз}}}$ обозначается ${}_kS_i$. Степенное среднее определяется как $\{S_k / n\}^{1/k}$ и комбинаторное среднее как $\left\{ {}_kS_i \div \binom{n}{i} \right\}^{1/ki}$. Автор показывает, что каждая симметрическая функция s-го порядка выражается через симметрические функции первого порядка и дает различные соотношения, выражающие ${}_kS_i$ через S-функции. *L. A. Aroian*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 45.

4868. Обобщение «заразных» распределений Неймана. Билл, Реша (A generalization of Neyman's contagious distributions. Beall Geoffrey, Rescia Richard R.), Biometrics, 1953, **9**, № 3, 354—386 (англ.)

Пусть на определенной площади случайно распределены несколько центров, вокруг которых в свою очередь случайно разбросаны отдельные объекты (насекомые, бактерии, растения). Для числа объектов, находящихся на данной единичной площадке, Нейман предложил три типа распределений, названных «заразными» (contagious), так как обнаружение на площадке одного объекта делает весьма вероятным нахождение на ней и других объектов (Neyman J., Ann. Math. Statistics, 1939, **10**, 35—37). Авторы вводят целый класс распределений с характеристическими функциями вида

$$\varphi(t) = \exp\left[m_1 \Gamma(n+1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{m_2^{s+1} (e^{it} - 1)^{s+1}}{\Gamma(n+s+2)} \right], \quad (1)$$

$$n \geqslant 0, \quad m_1 > 0, \quad m_2 > 0,$$

среди которых типы Неймана содержатся как частные случаи, соответствующие $n = 0, 1$ или 2. Авторы доказывают, что (1) действительно является характеристической функцией целочисленной неотрицательной случайной величины ξ, устанавливают соотношения между параметрами n, m_1, m_2 и первыми тремя моментами ξ, приводят схемы для практического вычисления при целом n вероятностей $p_k = P\{\xi = k\}$ и их пределов при $n \to \infty$ и фиксированных первых двух моментах.

Имеющиеся в статье многочисленные примеры показывают, что в ряде случаев введенные авторами распределения лучше согласуются с наблюденными данными, чем распределения Неймана.

А. А. Юшкевич

4869. Выравнивание при помощи ортогональных полиномов. Уишарт, Метакидес (Orthogonal polynomial fitting. Wishart John, Metakides Theocharis), Biometrika, 1953, **40**, 4, 3—4, 361—369 (англ.)

Излагается способ разыскания множественных регрессий и параболического выравнивания, основанный на последовательной ортогонализации наблюденных данных. Основной принцип его восходит к Чебышеву (О непрерывных дробях, Уч. зап. Имп. Акад. наук, 1855, **3**, 636—664) и был применен к множественным регрессиям и параболическому выравниванию референтом в 1932 г. (Ciorn. Istit. Ital. Attuari, 1932, **3**, № 2, 201—222; см. также книгу референта «Математическая статистика», ГТТИ, М.—Л., 1938, 437, 465).

В статье авторов даны разработанные схемы вычислений и приведен числовой пример.

В. И. Романовский

4870. Заметка о делимых на группы планах с некомплектными блоками. Наир (A note on group divisible incomplete block designs. Nair K. R.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1953, **5**, № 17, 30—35 (англ.)

4871. Разложение ошибки в случайных блоках. Кемпторн, Баркли (The partition of error in randomized blocks. Kempthorne O., Barclay W. D.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 263, 610—614 (англ.)

Рассматриваются разложение ошибки в случайных блоках на компоненты по факторам и соответственные разложения сумм квадратов. При этом возникают задачи исследования неаддитивности и неоднородности ошибок. Описываются в общих чертах, с многочисленными ссылками, способы исследования этих задач и подчеркивается необходимость дальнейшего исследования их, особенно задачи об аддитивности.

Ввиду математической сложности и даже, возможно, неразрешимости указанных задач рассматривается их экспериментальное исследование при помощи одной выборки, состоящей из 1000 различных планов случайных блоков определенного типа, причем обнаружилась, на основании критерия Бартлетта, некоторая неоднородность ошибок, тогда как в действительности опыты были поставлены так, что неоднородности не могло быть. Отсюда авторы заключают о ненадежности критерия Бартлетта для исследования неоднородности ошибки и о необходимости исследования приложимости его, асимптотического по существу, к действительным опытам обычно небольшого объема. *В. И. Романовский*

4872. Применение одного критерия больших выборок к некоторым выборочным задачам факторного анализа. Рипп (Application of a large sampling criterion to some sampling problems in factor analysis. Rippe Dayle D.), Psychometrika, 1953, **18**, № 3, 191—205 (англ.)

Подробно (с таблицами и примерами) излагается способ исследования факторных нагрузок, аналогичный способу Лоли (Lawley D. N., Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1940, **60**, 64—82) и основанный на

применении метода наибольшего правдоподобия. Теория его основана на выборочном распределении матрицы ковариаций и представляет специальный случай теории критериев значимости различных коэффициентов корреляции для больших выборок.
В. И. Романовский

4873. **Простые графические приемы для вычисления некоторых эмпирических корреляционных характеристик.** **Джоуэтт, Скотт** (Simple graphical techniques for calculating serial and spatial correlations and mean semi-squared differences. Jowett G. H., Scott J. F.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, B15, № 1, 81—86 (англ.)

Приводятся два графических метода для вычисления некоторых эмпирических корреляционных характеристик.
С. Х. Туманян

4874. **Способы последовательного анализа в страховом деле.** **Вюнше** (Sequential-Testverfahren in der Versicherungstechnik. Wünsche Günther), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1953, 1, № 4, 19—37 (нем.)

Популярная статья.

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 47.

4875. **Об использовании отмеченных образцов при оценке популяции летающих насекомых.** **Крейг** (On the utilization of marked specimens in estimating populations of flying insects. Craig C. C.), Biometrika, 1953, 40, ч. 1—2, 170—175 (англ.)

Критическое сопоставление различных методов оценки численности популяции насекомых по данным произведенного отлова. Предполагается, что пойманный экземпляр после его отметки подлежит освобождению. Регистрируются числа случаев попадания одних и тех же отмеченных насекомых при последовательных отловах.
Н. В. Смирнов

4876 РЕЦ. **Анализ спроса.** **Вольд, Юрен** (Demand analysis. Wold Herman, Juréen Lars, 358 pp., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953, 7.00 doll.) [**Рецензии: Фокс** (Fox Karl A.), Agric. Econ. Res., 1953, 5, № 3, 63—64; **Спайс** (Spies O. R.) J. Franklin Inst., 1953, 256, № 3, 296—297 (англ.)]

ТЕОРИЯ ИГР

4877. **Теория игр.** **Вайда** (Theory of games. Vajda S.), Sci. News, 1953, 28, 29—40 (англ.)

Дается популярное изложение элементов теории игр. На нескольких простых примерах выясняются классификация игр (игры при полной и частичной информации, со случайными и без случайных ходов) и некоторые принятые термины (игра, чистая и смешанная стратегии, седловая точка, цена игры). Упоминается теорема Нёймана (J. von Neumann) о цене игры. Указывается на трудности, возникающие при исследовании игр более чем с двумя игроками.

Автор указывает на монографию Нёймана и Моргенштерна (Neumann J. von, Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1947) как основной источник по вопросам теории игр.
С. С. Дымков

4878. **Элементы нёймановской теории игр** **Фёльнер** (Elementer af von Neumann's spilteori. Følner Erling), Nord. mat. tidskr., 1953, 1, № 2—3, 115—126, 144 (дат; резюме англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

4879. **О переходных процессах в линейных системах с монотонно возрастающими временными характеристиками.** **Овсеевич И. А.**, Сб. науч. работ по проводной связи АН СССР, 1953, № 2, 71—104

В электро- и радиотехнике линейные системы (четырехполюсники) характеризуются либо временной функцией $f(t)$ — реакцией системы на возмущение на входе типа единичного толчка, либо частотной характеристикой (иначе — спектральной функцией, передаточной функцией) $F(\omega)$, связанной с реакцией $f_\omega(t)$ системы на чисто периодическое возмущение на входе вида $a \cdot e^{i\omega t}$ соотношением: $f_\omega(t) = a \cdot F(\omega) e^{i\omega t}$; функции $f(t)$ и $F(\omega)$ являются парой преобразований Фурье. При последовательном («каскадном») соединении нескольких четырехполюсников их частотные характеристики перемножаются; соответственно этому суммарная временная функция оказывается равной свертке временных функций отдельных каскадов.

Отмечается, что если временные функции отдельных каскадов монотонны (не имеют выбросов), то их можно рассматривать как функции распределения некоторых случайных величин; согласно теореме Ляпунова свертка ряда таких функций при широких условиях будет быстро приближаться с увеличением их числа к нормальной (гауссовой) кривой. Приводятся некоторые примеры, иллюстрирующие это заключение. Указывается связь среднего значения и дисперсии функции распределения $f(t)$ с временем задержки и временем нарастания временной функции $f(t)$, используемыми в качестве числовых характеристик линейных систем в электротехнике. В случае временных функций, близких к гауссовой кривой, но не совпадающих с ней, удобно воспользоваться разложением $f'(t)$ в ряд по функциям Эрмита (ряд Чебышева — Шарлье) и вытекающим отсюда разложением временной функции $f(t)$ в ряд по производным нормальной функции распределения. Для вычисления коэффициентов при первых пяти членах этого ряда надо знать, кроме времени задержки и времени нарастания временной функции, еще две численные характеристики системы, совпадающие с асимметрией и эксцессом функции распределения $f(t)$; для определения этих характеристик удобно исходить из значений коэффициентов разложения функции $\ln F(\omega)$ в степенной ряд («семиинвариантов»).
А. М. Яглом

4880. **Радиолокация и телевидение.** **Лёб** (Radar et television. Loeb M.), Onde électr., 1953, 33, № 316, 478—481 (франц.)

Несколько кратких аннотаций на работы, в которых изучаются вопросы детектирования и выделения периодической последовательности радио-

импульсов на фоне шумов в случае, когда уровень шумов превышает уровень сигнала.

Я. И. Хургин

4881. Измерение размеров частиц в непрозрачных телах. Фулман (Measurement of particle sizes in opaque bodies. Fullman R. L.), J. Metals, 1953, **5**, № 3, 447—452 (англ.)

Предлагается способ оценки размеров частиц, включенных в непрозрачные тела, путем подсчета среднего значения площадей, занимаемых этими частицами на плоских шлифах, произведенных параллельно граням случайно ориентированных кубов одинакового объема, вырезаемых из рассматриваемого тела, и среднего значения длин общей части частиц и прямых, наудачу проводимых параллельно ребрам кубов. При некоторых предположениях о форме частиц и их относительных величинах определены математические ожидания этих средних значений как функции искомых размеров.

Статистическая задача о степени точности и надежности оценок искомых размеров, получаемых из выведенных соотношений заменой математических ожиданий фактически подсчитанными средними значениями, в статье не ставится. Не приводится никаких рекомендаций, относящихся к объему эксперимента, т. е. к числу подлежащих исследованию кубических образцов, или к количеству исследуемых в таком кубе случайных плоских (шлиф) и линейных сечений. *Г. И. Егудин*

4882. Случайные колебания в структуре пряжи. III. Пикар (The irregularity of slivers. III. Picard H. C.), J. Text. Inst. (Trans), 1953, **44**, № 7, 1307—1316 (англ.)

Заключительная часть большого исследования, развивающего корреляционную теорию структуры пряжи (J. Text. Inst. (Trans) 1951, **42**, 503—509; 1952, **43**, 251—261). На основе этой теории делаются заключения относительно экспериментально получаемой кривой $B(L)$, характеризующей дисперсию веса на отрезках нити длины L. *Н. В. Смирнов*

4883. Вычисление кривой дисперсии по длине пряжи при данном распределении длины волокон. Брени (Calcul de la courbe variance-longueur à partir de la distribution de longueur des fibres. Breny H.), Bull. Inst. text. France, 1953, № 40, 43—62 (франц.)

См. РЖМат, 1953, 1314, 1315.

4884. Статистический анализ микрогеометрических неровностей обработки деталей. Кавe (Die statistische Analyse der mikrogeometrischen Aberrationen mechanischer Stücke. Cavé), Microtechnic, 1953, **7**, № 5, 227—240, 245 (нем.)

Работа имеет полуэмпирический характер. В ней приводятся числовые параметры, применяемые различными авторами для описания профиля поверхности обработанной детали, на которой имеются неровности в виде параллельных прямолинейных желобков. С точки зрения «макрогеометрии» поверхность считается плоской и профиль прямолинейным.

Для заданного профиля автор вводит понятие линии отсчета, определяя ее (без надлежащей точности и однозначности) с помощью «самых высоких гребней». Обозначая эту прямую через O_y и беря ее за ось абсцисс, автор задает профиль уравнением $h = g(y)$ и вводит параметры:

$$h_r = L^{-1}\int_0^L g(y)\,dy, \quad H_r = \max g(y) - \min g(y),$$

$$h_{rms} = \sqrt{\frac{1}{L}\int_0^L [g(y) - h_r]^2\,dy},$$

$$h_{ave} = L^{-1}\int_0^L |g(y) - h_r|\,dy$$

и безразмерные коэффициенты:

$$K = \frac{h_r}{H_r}, \quad K'' = \frac{h_{ave}}{H_r}, \quad K' = \frac{h_{rms}}{H_r}.$$

Далее делаются замечания о статистическом характере неровностей профиля без точного пояснения смысла этого обстоятельства и без использования идеи случайной функции в современном понимании. Рассматривается функция распределения высоты неровностей (точное определение ее также отсутствует). Рассматриваются ее среднее $\overline{h}$ и «дисперсия» этого среднего (которое автором отождествляется со средним выборочным для большого числа измерений, так что можно говорить о дисперсии $\mathrm{var}(\overline{h}) = \sigma^2/n$). Далее сообщаются общеизвестные сведения об асимптотическом поведении медианы и среднего абсолютных уклонений для выборки из нормальной совокупности. Вводятся безразмерные коэффициенты: «симметрии» $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3$, «уплощения» $\beta_2 = \mu_4/\mu_3^2$ и вариации $V = 100\,\sigma/\overline{h}$. Приводится табличка, сопоставляющая введенные параметры для функции распределения глубины впадин $f(R)$ с параметрами h_r, H_r h_{rms}, h_{ave}, более доступными опытному измерению. Разбираются свойства и способы эмпирического определения безразмерных коэффициентов.

Наконец, автор без каких-либо пояснений называет введенные им параметры наилучшими и в особенности подчеркивает роль коэффициентов K и K'.

После этого приводится протокол обсуждения работы Каве. Общие выводы обсуждения: нужно связывать вводимые статистические параметры с «функциональными характеристиками» различных способов производственной обработки и искать, какие изменения в способах обработки и материалах деталей позволяют сохранять те или иные соотношения между параметрами.

В статье замечены опечатки, в частности в формуле (19), стр. 229 вместо $|h\overline{h}|$ следует читать $|h - \overline{h}|$; в табл. 1, стр. 230 вместо σh следует читать σ_h. Можно показать, что эмпирическое соотношение $0{,}2H_r < h_r$ на стр. 233 верно лишь для профилей длины, не очень большой сравнительно с числом максимумов. *Ю. В. Линник*

4885 РЕЦ. Теория информации. Голдман (Information theory. Goldman Stanford, 385 pp., ill., Prentice-Hall, Inc., 1953, 9. 00 doll.) [**Рецензия: Плацер** (Platzer H.), J. Franklin Inst., 1954, 257, № 1, 77 (англ.)]

См. также: 4686, 4698, 4700, 4772, 4773, 4920

ГЕОМЕТРИЯ

4886. Кривые погони. Паккет (The curve of pursuit. Puckette C. C.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 322, 256—260 (англ.)

Находятся все кривые, дуга которых равна сумме абсциссы точки кривой и ее подкасательной, умноженной на постоянное число m. Проведено исследование частных случаев в зависимости от значения m.

Рассмотренная задача является обобщением задачи Бугера (Pierre Bouguer (1698—1758) о нахождении траектории корабля, преследующего другой корабль; такие траектории Бугер назвал кривыми погони.

В начале заметки подробно изложена история вопроса о кривых погони. *Ю. Е. Пензов*

4887. Краткие заметки о геометрии треугольника. Кавалларо (Brevi note sulla geometria del triangolo. Gavallaro Vincenzo G.), Euclides, 1953, **13**, № 153—154, 449—452 (итал.)

В плоскости треугольника ABC ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$) построены подобные ромбы $BLCL'$, $CMAM'$, $ANBN'$; обозначения выбраны так, что точка L' лежит по ту же сторону от BC, что и A. Аналогично для M', N'. Автор выражает длины отрезков AL, BM, CN (1) и AL', BM', CN' (2) через a, b, c, $\lambda = LL' : 2a$ и площадь треугольника ABC. Если $\lambda = \sqrt{3}/6$, то, как известно, треугольники LMN и $L'M'N'$ равносторонние; обозначим их стороны соответственно через l и l'.

Если $\lambda = \sqrt{3}/2$, то отрезки (1) и (2) называются отрезками Торричелли. В этом случае $AL=BM=CN(=T)$, $AL'=BM'=CN'(=T')$, треугольники BCL, CAM, ABN и BCL', CAM', ABN' равносторонние, отрезки (1) пересекаются в точке Z, отрезки (2) — в точке Z', где Z и Z' — изогональные центры треугольника ABC. Автор вычисляет $\cos \angle LAL'$ и устанавливает ряд зависимостей между величинами a, b, c, T, T', l, l' и расстояниями от центра тяжести треугольника ABC до точек Z и Z'.

Пусть Ω — одна из точек Брокара треугольника ABC; A_1, B_1, C_1 — ее ортогональные проекции на стороны этого треугольника; A_m, B_m, C_m — ее ортогональные проекции на стороны треугольника $A_{m-1}B_{m-1}C_{m-1}$ ($m=2, 3, \ldots$). Пусть K — точка Лемуана треугольника ABC; A_1, B_1, C_1 — ее ортогональные проекции на стороны этого треугольника; K_1 — точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$; A_m, B_m, C_m — ортогональные проекции точки Лемуана K_{m-1} треугольника $A_{m-1}B_{m-1}C_{m-1}$ на его стороны ($m=2, 3, \ldots$). Обозначим площадь треугольника $A_mB_mC_m$ в первом случае через S_m, во втором — через θ_m.

Автор выражает S_m и θ_m через T и T' — длины отрезков Торричелли треугольника ABC. Формула для S_m содержит опечатки; она должна иметь вид

$$S_m = \frac{(T^2 - T'^2)^{2m+1}}{2^{2(m+1)}\sqrt{3}(T^4 + T^2T'^2 + T'^4)^m} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Другие опечатки не влияют на окончательный результат.

Автор вычисляет также периметр и площадь шестиугольника Лемуана (выпуклый шестиугольник, вершины которого получаются проектированием точки Лемуана треугольника на каждую из сторон этого треугольника прямыми, параллельными двум другим сторонам).

А. С. Смогоржевский

4888. Совокупность эллипсов, имеющих одну и ту же большую ось, и новые ее построения. Палаццо (Sulla totalità delle ellissi aventi lo stesso asse maggiore e nuove costruzioni di quelle. Palazzo Elena), Ricerca, Napoli 1953, **4**, № 1—2, 59—68 (итал.)

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 56.

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

4889. Об одном пространственном способе решения оптических задач. Рёйшель (Über ein dreidimensionales Verfahren zur Behandlung optischer Probleme. Reuschel A.), Optik, 1953, **10**, № 10, 470—475 (нем.)

В большинстве задач геометрической оптики осесимметричных линз ограничиваются исследованием пучков лучей в меридиональной плоскости. Для этого предлагается заменить путь луча в меридиональной плоскости пространственной линией, восстанавливая в каждой точке P луча перпендикуляр к этой плоскости и откладывая в определенном масштабе время, в течение которого свет достигает точки P (оптический путь света).

С помощью такого пространственного построения решается задача: определить форму несферической поверхности осесимметричной линзы, толщина по оси и показатель преломления которой заданы, из условия, чтобы лучи широкого пучка, исходящие из осевой точки, после преломления в линзе пересекались бы в одной точке (исправление сферической аберрации). Этот же метод позволяет вычерчивать кривую пересечения волны света с плоскостью, параллельной меридиональной плоскости. *П. П. Касьянков*

4890. Деформация конических зубчатых колес. Вайнберг (Деформація конічних зубчатих коліс. Вайнберг Д. В.), Доповіді АН УкрРСР, 1953, № 6, 442—445 (укр.; резюме русск.)

Рассмотрена известным методом (Горбунов В. Н., Кротов Ю. В., Основы расчета пространственных систем, М.—Л., 1936) задача о пространственной деформации конических зубчатых колес передач. Предлагается вести расчет при помощи теории мóторов. Для упрощения расчета рекомендуется использовать предложенный автором (Докл. АН СССР, 1951, 80, № 5, 721—724) способ задания сил в виде гармонических полиномов.

И. С. Аржаных

4891. Условия интегрируемости тензора полной деформации в связи с преобразованием сплошной среды в трехмерном пространстве. Платрийе (Conditions d'intégrabilité du tenseur de déformation totale dans une transformation finie d'un milieu à trois dimensions. Platrier Charles), Ann. ponts et chaussées, 1953, **123**, № 6, 703—709 (франц.)

Расширенное изложение ранее опубликованной заметки автора (РЖМат, 1954, 3446).

И. С. Аржаных

4892. Введение в теорию спиноров. Бейд, Еле (An introduction to spinors. Bade W. L., Jehle Herbert), Revs Mod. Phys., 1953, **25**, № 3, 714—728 (англ.)

Дано изложение основ спинорного исчисления в форме, приспособленной для физиков, и в тесной связи с физическими приложениями. Рассмотрев формальную сторону законов преобразований тензоров и аналогично спиноров, авторы вводят фундаментальный спинор и дают перечисление алгебраических свойств спиноров. В следующих разделах устанавливается связь между тензорами пространства частной теории относительности (пространство Лоренца) и спинорами. Далее уравнения Максвелла-Лоренца для электромагнитного поля и уравнение Дирака для электрона записываются в спинорном виде. В заключение дается очерк спинорного анализа по Инфельду и Ван-дер-Вардену (Infeld, van der Waerden). К работе приложен список важнейшей литературы (76 наименований).

Б. Л. Лаптев

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4893. Об одной теореме Гильберта в неевклидовой геометрии Лобачевского — Бойаи. Антонеску (Asupra teoremei lui Hilbert din geometria lui Lobacevschi — Bolyai. Antonescu M.), Studii şi cercetări mat., 1953, **4**, № 1—2, 197—211 (рум.; резюме русск.)

Рассматривается чебышевская сеть на плоскости Лобачевского с кривизной $K = -1$. В параметрах сети $ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2$ сетевой угол ω удовлетворяет уравнению $\partial^2\omega / \partial\alpha\,\partial\beta = \sin\omega$.

Показывается, что решение $\omega(\alpha, \beta)$ этого уравнения принимает значения $k\pi$ (k — целое) и уравнение $\omega(\alpha, \beta) = k\pi$ определяет огибающую чебышевской сети. Тем самым снова доказывается теорема Гильберта о невозможности полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны. Последняя часть статьи посвящена построению поверхности постоянной отрицательной кривизны, на которой асимптотические огибают кривую с внутренним уравнением $\omega(\alpha, \beta) = 0$.

Н. В. Ефимов

4894. Кривая третьего порядка, связанная с неподвижной точкой точечного преобразования. Вилла (Una cubica collegata ad un punto unito di una trasformazione puntuale. Villa Mario), Atti Accad. Ligure, 1952, **9**, 165—175 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Пусть O — неподвижная точка точечного преобразования T плоскости в себя. Неподвижные точки касательных квадратичных преобразований (отличные от O) определяют плоскую инволюцию троек точек. Неподвижная кривая, вообще говоря, является рациональной плоской кривой третьего порядка с узлом в O, касательные которой суть соответствующие себе лучи проективитета, определяемого преобразованием T среди направлений, выходящих из точки O. Автор находит уравнение этой кривой третьего порядка и исследует различные специальные случаи вырождения ее. *J. A. Todd*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 58.

4895 К. Сборник задач по начертательной геометрии в применении к различным областям науки и техники. Траутман Н. Ф., Учеб. пособие для втузов, 280 стр., Машгиз, М., 1953, 8 р. 40 к.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4896. О Ф-инварианте двух поверхностей второго порядка. Скотт (On the Φ-invariant of two quadrics. Scott T.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, **10**, сер. 2, 25—36 (англ.)

Пусть $U = 0$ и $V = 0$ — уравнения двух поверхностей второго порядка. Значения λ, при которых $U + \lambda V = 0$ является конусом, определяются уравнением четвертой степени. Коэффициенты этого уравнения суть инварианты данной пары поверхностей. Ф-инвариантом называется коэффициент при λ^2.

Было известно, что если существует тетраэдр, автополярный относительно одной поверхности, все ребра которого касаются другой, то $\Phi = 0$ и обратно, причем существуют две системы из ∞^1 тетраэдров указанного типа. Даются доказательства необходимости и достаточности условия $\Phi = 0$.

Исследуются геометрическое место какой-нибудь вершины тетраэдра, пробегающего одну из этих систем, и развертывающаяся поверхность, огибаемая его гранью. Это оказываются соответственно кривая восьмого порядка и поверхность восьмого класса.

Все рассуждения основаны на символике Клебша — Аронгольда. *Н. М. Бескин*

4897. К алгебраической геометрии 16. Многообразия абстрактных цепей. Ван-дер-Варден (Zur algebraischen Geometrie 16. Vielfältigkeiten von abstrakten Ketten. Van der Waerden B. L.), Math. Ann., 1953, **125**, № 3, 314—324 (нем.)

В работе переносится на цепи в абстрактных многообразиях понятие многообразия цепей, определенное ранее Чжоу и Ван-дер-Варденом (Chow W. L., van der Waerden B. L., Math. Ann., 1937, **113**, 692—704). Предварительно излагается теория цепей на основе новой терминологии, предлагаемой автором и являющейся некоторым изменением терминологии А. Вейля.

Рассматриваются: основное поле k и его расширения — конечное K и универсальное Ω, полученные присоединением к k конечного (соответственно счетного) множества неопределенных и последующим алгебраическим замыканием, и над Ω аффинное R_n и проективное S_n пространства. Многообразие (м.) (Vielfältigkeit) есть конечная система

алгебраических уравнений $f_k = 0$, левые части которых суть полиномы для R_n и формы для S_n с коэффициентами из Ω. Многообразие, не разлагающееся на два частичных м. — неделимо (unteilbar ≡ «абсолютно неприводимо»). Точка P с координатами из K называется специализацией точки X относительно K, если все уравнения, верные для X, верны для P. Неприводимое над K м. V имеет общую точку X, из которой все точки V получаются специализацией относительно K. Размерность V есть число алгебраически независимых координат его общей точки (при нормировании $p_0 = 1$, если $p_0 \neq 0$ для S_n). Абстракт $V = \{V_\alpha, T_{\alpha\beta}, F_\alpha\}$ есть конечная система неделимых м. V_α, между которыми установлены бирациональные соответствия $T_{\alpha\beta}$ ($V_\alpha = T_{\alpha\beta}, V_\beta$); на каждом из этих м. определена его правильная часть F_α, называемая его границей; $T_{\alpha\beta}$ определяются лишь на $V_\beta - F_\beta$. При этом, если $P_\alpha = T_{\alpha\beta}P_\beta$ и $P_\beta = T_{\beta\alpha}P_\alpha$, то отображения $T_{\alpha\beta}$ и $T_{\beta\alpha}$ должны быть регулярны в точках P_β и P_α соответственно. Тогда каждой точке P_α соответствует максимальная система $(P_\alpha, P_\beta, P_\gamma, \ldots)$, в которой каждая точка не лежит на границе соответствующего м., и каждые две точки P_β и P_γ составляют пару в некотором преобразовании $P_{\beta\gamma}$. Совокупность этих систем составляет точку абстракта; абстракт есть совокупность своих точек. Специализация общей точки $(X_\alpha, \ldots)$ абстракта определяется специализацией, например, X_α и построением соответствующей максимальной системы.

Далее рассматривается в S_n неприводимое над K м. V размерности d и d гиперплоскостей $u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}$. Их пересечение с V дает g сопряженных над K точек $X^{(i)}$. Если $u_0, \ldots, u_n$ — неопределенные, то $P = \prod_1^g (u_0 X_0^{(\nu)} + \ldots + u_n X_n^{(\nu)})$ является рациональной функцией Q неопределенных u_i (в случае поля характеристики p вместо P следует взять некоторую степень P^q, где $q = p^e$). Эту функцию можно представить в виде AF/B, где A, B — целые рациональные функции $u^{(1)}, \ldots, \ldots, u^{(d)}$, а F — целая рациональная функция от u, $u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}$, не содержащая зависящего только от $u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}$ множителя. F называется отнесенной V формой (zugeordnete Form). При соответствующем расширении поля $KF = F_0^q$, где F_0 называется формой Кэли для V, V и его форма Кэли F_0 взаимно однозначно определяют друг друга, причем распаданию V соответствует разложение F_0 на множители и наоборот.

Цепь C в S_n есть конечная совокупность неделимых м. V_i одинаковой размерности d, с присвоенными им целыми положительными кратностями $e_i : C = \sum e_i V_i$. Если F_i — форма Кэли для V_i, то $F = \prod F_i^{e_i}$ называется формой Кэли для C, а коэффициенты F — координатами C, которая, таким образом, представляется точкой некоторого проективного пространства S_N. Если g_i — степень F_i, то $g = \sum e_i g_i$ называется степенью цепи. М. цепей одной размерности d и степени g есть совокупность цепей, координаты которых удовлетворяют конечной системе однородных уравнений. Все понятия, относящиеся к м., переносятся на м. цепей.

Для переноса понятия м. на цепи в абстрактных м. достаточно определить понятие специализации для абстрактных цепей. Пусть дан абстракт V, и поле K содержит коэффициенты всех отображений $T_{\alpha\beta}$ и форм Кэли для всех V_α. Пусть на V задана неделимая цепь C, т. е. максимальная система неделимых C_α на V_α, точки общего положения которых P_α не лежат на F_α и $P_\beta = T_{\beta\alpha}P_\alpha$. Если $C_1, \ldots, C_h$ — образы C_α в S_N и $C_1 \to D_1, \ldots, \ldots, C_h \to D_h$ — одновременная специализация точек $C_1, \ldots, C_h$, то $D_1, \ldots, D_h$ снова представляют d-мерные цепи на $V_1, \ldots, V_h$. Оказывается, что если A_α и A_β — две неделимые части V_α и V_β, не принадлежащие F_α и F_β и соответствующие друг другу в преобразовании $T_{\beta\alpha}$, то A_α в D_α имеет тот же коэффициент, что A_β в D_β. Таким образом, кратность f, с которой A_α входит в D_α, не зависит от α; строя из A_α максимальную систему, т. е. неделимую часть A абстракта V, приписываем ей кратность f в цепи D и цепь $D = \Sigma f A$ называем специализацией C относительно K. Специализация произвольной цепи определяется разложением ее на неделимые и специализацией последних.

Совокупность всех специализаций цепи C относительно K определяется как неприводимое м. цепей над K. М. цепей называется объединение конечного числа неприводимых м., м. неделимо, если оно остается неприводимым при всех расширениях поля K. Таким образом, понятие м. переносится на цепи в абстрактных м. *В. В. Морозов*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

4898. **К геометрии поверхностей вращения и их геодезических линий. Вундерлих** (Zur Geometrie der Drehflächen und ihrer geodätischen Linien. Wunderlich Walter), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 3, 199—216 (нем.)

Совокупность касательных к семейству ∞^1 конгруентных геодезических линий поверхности вращения Φ_1 образует конгруенцию, вторая фокальная поверхность которой есть коаксиальная с Φ_1 поверхность вращения Ψ_1. Такое же построение для всех геодезических линий всех поверхностей Ψ, соответствующих поверхности Φ, дает не ∞^2, а только ∞^1 коаксиальных поверхностей Φ, среди которых содержится и Φ_1. Эти два семейства поверхностей Φ и Ψ образуют ортогональную систему, которая вполне определяется заданием точечного соответствия $F(u, v) = 0$ между точками оси вращения ox, имеющими абсциссы u и v и являющимися точками пересечения оси с касательной плоскостью и нормалью некоторой точки поверхности семейства Φ и одновременно (но в

обратном порядке) — некоторой точки поверхности семейства Ψ. По заданному соответствию $F(u, v) = 0$ меридианы поверхностей Φ определяются уравнениями

$$x = v - c^2\zeta^2 / (v - u),$$

$$y = c\zeta [1 - c^2\zeta^2 (v - u)^{-2}]^{1/2},$$

а меридианы поверхностей Ψ — уравнениями

$$x^* = u + c^{*2} (v - u) \zeta^{-2},$$

$$y^* = c^* (v - u) \zeta^{-2} (\zeta^2 - c^{*2})^{1/2},$$

где $\zeta = \exp \int (v - u)^{-1} du$, а $c^* c = C$ есть константа из известной теоремы Клеро.

Если меридианы поверхности Φ (или Ψ) рассматривать как циклографические отображения, то прообразы меридианов семейства Φ (или Ψ) представляют собой семейство плоских кривых, получающихся друг из друга путем умножения расстояния каждой точки от оси вращения на одно и то же число. Это дает возможность легко найти семейства поверхностей Φ и Ψ в том случае, когда соответствие $F(u, v) = 0$ является сдвигом, гомотетией и общим проективным соответствием.

Если от поверхности Φ_1 перейти к параллельной поверхности, отстоящей от Φ_1 на расстоянии d, то циклографические прообразы меридианов поверхностей Φ сдвигаются на то же расстояние вертикально, а циклографические прообразы меридианов поверхностей Ψ подвергаются горизонтальному аффинному сдвигу в плоскости (u, z^*) по формулам $\bar{u} = u - \lambda z^*$, $\bar{z}^* = z^*$, где $\lambda = d / c$. Это дает возможность найти семейства поверхностей Φ и Ψ, порождаемые тором и поверхностью вращения астроиды вокруг оси симметрии, проходящей через точки возврата. *Р. Н. Щербаков*

4899. Проективный линейный элемент квадратичной конгруенции прямых. Сегре (L'élément linéaire projectif d'une congruence quadratique de droites. Segre Beniamino), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, **39**, сер. 5, № 5, 481—489 (франц.)

Конгруенция прямых K в n-мерном проективном пространстве S_n называется квадратичной, если она целиком лежит на гиперквадрике Ω. Для этого необходимо и достаточно, чтобы обе ее фокальные поверхности P и Q принадлежали Ω. Если p и q — фокусы одного луча, а u, v — параметры фокальной сети, то $p_u = \beta q$, $q_v = \gamma p$. Касательная плоскость к Ω в точке p имеет касание 2-го порядка в точке q с поверхностью Q, а потому пересекает ее по кривой, имеющей точку q тройной. Три касательные в точке q к этой кривой называются главными, так же называются огибаемые ими кривые, уравнение которых

$$\{q_u, q_u\} \beta du^3 - \{p_v, p_v\} \gamma dv^3 = 0,$$

где через $\{x, y\}$ обозначается полярная форма левой части уравнения квадрики Ω. Главные кривые на фокальных поверхностях соответствуют и лучи конгруенции вдоль них образуют главные линейчатые поверхности.

Если одна из главных линий совпадает с линией фокальной сети, то соответствующее преобразование Лапласа от K — также квадратичная конгруенция. Если оба преобразования Лапласа — квадратичные конгруенции, то главные линии неопределенны. Формы

$$\Phi_2 = \sqrt{-\{p_v, p_v\} \{q_u, q_u\}}\, dudv,$$

$$\Phi_3 = (\{q_u, q_u\} \beta du^3 - \{p_v, p_v\} \gamma dv^3) / 2$$

инвариантны с точностью до знака при замене переменных, а при умножении координат p или q на число умножаются на то же число. Отношение $\Phi_3 : \Phi_2$ — абсолютный инвариант, так называемый проективный линейный элемент квадратичной конгруенции. Он обращается в нуль вдоль главных линейчатых поверхностей.

Асимптотические касательные нелинейчатой поверхности F в S_3, как известно, в отображении Плюккера переходят в две фокальные поверхности квадратичной конгруенции K в S_5, для которой роль Ω играет квадрика Плюккера. Формы Φ_2 и Φ_3 для этой конгруенции будут равны

$$\Phi_2 = 2dudv,\ \Phi_3 = \omega (\beta du^3 + \gamma dv^3),\ \omega = \pm 1,$$

т. е. проективный линейный элемент Фубини поверхности F совпадает с проективным линейным элементом этой квадратичной конгруенции K. Главные линейчатые поверхности соответствуют линиям Дарбу на поверхности F. *М. В. Васильева*

4900. Прямолинейные конгруенции, развертывающиеся поверхности которых пересекают некоторую поверхность по ее сетям Чебышева. Кутуманос (Rectilinear congruences whose developables intersect a surface in its Tchebychef curves. Coutoumanos A.), Bull.Soc. Math. Grèce, 1953, **27**, 1—24 (греч.; резюме англ.)

Сферическое изображение развертывающейся поверхности есть кривая, высекаемая на единичной сфере радиусами, параллельными образующим поверхности. Следующая задача, как показано, имеет решения: если единичная сфера задана в определенном параметрическом представлении, то существует прямолинейная конгруенция такая, что развертывающиеся поверхности ее имеют параметрические линии на сфере своими сферическими изображениями и пересекают другую подходящую поверхность по сети Чебышева. Приложения этого факта, данные в работе,— тривиальны, например: поверхность с ортогональной сетью Чебышева — развертывающаяся. *H. Busemann*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1120.

4901. Инвариантный признак поверхности Лиувилля. Шуликовский В. И., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 1, 29—32

Работа посвящена задаче: по данной метрике поверхности в произвольных координатах $ds^2 = g_{ik} du^i du^k$ установить, принадлежит ли поверхность к числу поверхностей Лиувилля, т. е. существуют ли на поверхности специальные координаты, для которых $ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$, где $U = U(u)$, $V = V(v)$. В основу решения положен

известный факт: на поверхностях Лиувилля и только на них дифференциальные уравнения геодезических (второго порядка) имеют квадратичный первый интеграл $a_{ik}(du^i/ds)(du^k/ds) = c$. Поверхности Лиувилля разделяются на классы по числу независимых квадратичных интегралов геодезических. Если имеется четыре независимых квадратичных интеграла, то существует пятый и кривизна поверхности постоянна. В реферируемой работе даны признаки поверхностей Лиувилля, обладающих квадратичными интегралами геодезических в числе 3, 2 и 1. Признаки громоздки, но даны в законченном виде — в виде равенства нулю выражений, которые вполне определенным образом составляются по метрическому тензору g_{ik}. *Н. В. Ефимов*

4902. Об отображениях поверхностей на плоскость, при которых геодезическим окружностям Дарбу поверхности соответствуют окружности плоскости. Шершевский Е. П., Сб. студ. науч. работ Ростовского гос. ун-та, 1953, № 2, 64—70

Доказывается теорема: чтобы поверхность можно было отобразить на плоскость так, чтобы ее геодезическим окружностям Дарбу соответствовали окружности плоскости, необходимо и достаточно, чтобы поверхность имела постоянную гауссову кривизну.

Если одно отображение дано, то все остальные получаются преобразованием подобия и инверсии на плоскости. Для сферы это отображение есть стереографическая проекция на плоскость. Для поверхности постоянной отрицательной кривизны оно совпадает с интерпретацией Пуанкаре планиметрии Лобачевского. *С. В. Бахвалов*

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4903. К дифференциальной геометрии гиперповерхности аффинного комплексного пространства. Пясецкий С. А., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, **71**, № 1, 99—126

Работа представляет собою видоизменение схемы А. М. Лопшица (Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1950, № 8, 273—285), которое сводится к замене вектора n параллельным ему относительным вектором N.

В комплексном аффинном пространстве A_{n+1} уравнением $r = r(u^i)$, $i = 1, \ldots, n$, задается гиперповерхность. К ней присоединяется репер, состоящий из касательных векторов $r_i = \partial r / \partial u^i$ и относительного вектора N веса $n+1$, эквиаффинно-инвариантным образом связанного с поверхностью. Инвариантность N достигается путем нормирования $(Nr_1 \ldots r_n) = \lambda$, где $\lambda = \det|\lambda_{ij}|$, $\lambda_{ij} = (r_{ij} r_1 \ldots r_n)$, и условия, состоящего в том, чтобы изменение N при бесконечно малом смещении по гиперповерхности лежало в касательной плоскости.

Разложение $r_{ij} = \Gamma^k_{ij} r_k + C_{ij} N$ определяет симметрическую связность Γ^k_{ij} и невырожденный относительный тензор C_{ij} веса $-(n+1)$. В работе указаны необходимые и достаточные условия, при которых Γ^k_{ij} и C_{ij} с точностью до эквиаффинного преобразования определяют единственную гиперповерхность. *П. И. Швейкин*

4904. О полях вектора Киллинга в келеровом пространстве. Яно (On Killing vector fields in a Kaehlerian space. Yano Kentaro), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 6—12 (англ.)

Исследуются свойства вектора Киллинга, т. е. вектора с антисимметрической ковариантной производной $\xi_{i,j}$, в пространстве $2n$ измерений с эрмитовой метрикой нулевого кручения. Пространство предполагается компактным, метрика — положительно определенной. Линейный элемент

$$ds^2 = g_{ij}\, dz^i dz^j \quad (i, j = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n};\ g_{ij} = g_{ji})$$

имеет следующую структуру:

$$ds^2 = 2g_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha d\bar{z}^\beta \quad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 1, \ldots, n \\ \bar{\alpha}, \bar{\beta} = \bar{1}, \ldots, \bar{n} \end{pmatrix},$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0,\ g_{\alpha\bar{\beta}} = \bar{g}_{\bar{\alpha}\beta},\ \frac{\partial g_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}^\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial \bar{z}^\beta},$$

$z^{\bar{\alpha}} = \bar{z}^\alpha$ (черта над коренной буквой означает комплексную сопряженность).

Это пространство автор называет келеровым (Kähler E., Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1933, **9**, 173—186), хотя значительно раньше П. А. Широков построил эквивалентный по существу тип пространств, называемых им A-пространствами (Изв. Казанского физ.-матем. об-ва, 1925, **25**, 86—114), как это отмечено А. П. Широковым (Уч. зап. Казанского ун-та, 1951, **111**, № 8, 97—103).

Установлен ряд свойств вектора Киллинга $\xi^i = (\xi^\alpha, \xi^{\bar{\alpha}})$, удовлетворяющего требованию

$$\xi^\alpha{}_{,\alpha} = 0. \qquad (1)$$

Такой вектор ковариантно постоянен. Компоненты ξ^α (соответственно $\xi^{\bar{\alpha}}$) являются аналитическими функциями z^λ (соответственно $\bar{z}^\lambda$). Обратно, при условии (1) из наличия аналитических зависимостей ξ^α от z^λ и $\xi^{\bar{\alpha}}$ от $\bar{z}^\lambda$ вытекает, что ξ^i является вектором Киллинга. Доказательства опираются на необходимые и достаточные условия для вектора Киллинга, полученные автором из тождеств Риччи (Ann. Math., 1952, 55, 38—45). Предварительно этот метод применяется к выводу известных свойств поля гармонического вектора. *Б. Л. Лаптев*

4905. Чистые поля излучения с центральной симметрией в общей теории относительности. Райчадхури (Reine Strahlungsfelder mit Zentralsymmetrie in der allgemeinen Relativitätstheorie. Raychaudhuri Amal Kumar), Z. Physik, 1953, **135**, № 2, 225—231 (нем.)

Поставлен вопрос: может ли вещество полностью перейти в излучение? В этом случае должны существовать поля излучения, не содержащие особенностей и граничащие с пустотой. Исследование эйн-

штейновских уравнений тяготения, проведенное автором, ограничивается случаем центральной симметрии, что естественно, так как если элементарный процесс излучения и предполагает существование некоторых особых направлений, то в случае макроскопического сферически симметричного распределения вещества следует полагать, что излучение вследствие совместного действия многих элементарных процессов будет однородно распространяться во всех направлениях. Показано, что существование статического поля излучения, граничащего с пустым пространством, невозможно. Исследование решения, полученного для нестатического поля излучения, приводит к заключению, что не может существовать зоны излучения, граничащей по двум поверхностям с пустым пространством. Однако, если поле простирается до начала, то его существование возможно, но лишь при наличии особенности в начале (источник или сток). Следовательно, теория Эйнштейна не допускает полного превращения вещества в излучение через конечное время, если ограничиться сферически симметричным случаем (случай звезды). *Б. Л. Лаптев*

4906. Спинорная теория относительности. Ингрэхэм (Spinor relativity. Ingraham R. L.), Nuovo cimento, 1953, **10**, № 1, 27—42 (англ.; резюме итал.)

Рассматривается вещественное риманово пространство 2ν измерений, отнесенное к координатам x^μ, где греческие индексы $\lambda, \mu, \ldots, \omega$ пробегают значения $1, 2, \ldots, 2\nu$. Метрический тензор обозначается $S^{\mu\rho}$ (метрическая форма знаконеопределенная). С касательным пространством $E_{2\nu}$ в каждой точке x^μ связывается спинорное пространство S_{2^ν}, т. е. комплексное аффинное пространство 2^ν измерений, в котором задано известное линейное представление клиффордовой алгебры в $E_{2\nu}$. Другими словами, поливекторы (в частности, векторы) в $E_{2\nu}$ изображаются в S_{2^ν} матрицами линейных преобразований η_b^a, где латинские индексы относятся к S_{2^ν} и пробегают значения $1, 2, \ldots, 2^\nu$.

Базисным ковариантным векторам e^μ в $E_{2\nu}$ отвечают в S_{2^ν} матрицы $\eta_b^{\mu a}$ ($\mu = 1, \ldots, 2\nu$); эти матрицы кратко обозначаются η^μ. Согласно свойствам спинорного представления $\eta^{(\mu}\eta^{\rho)} = S^{\mu\rho}A$, где A — единичная матрица.

Как показано Схоутеном, которому в этой части работы следует автор (Schouten J., Indagationes math., 1949, **11**, 178, 217, 336), в S_{2^ν} можно инвариантно определить эрмитов спинтензор $g_{\dot a b}$, заданный с точностью до вещественного множителя, и спинтензор $\Pi_b^{\dot a}$, обладающий свойством $\Pi^{-1} = \pm\overline{\Pi}$ и заданный с точностью до множителя вида $e^{\alpha i}$. При преобразовании аффинного репера в S_{2^ν} индексы с точкой преобразуются при помощи комплексно сопряженного преобразования; черта наверху означает комплексную сопряженность. В дальнейшем предполагается $\nu = 3$, так что приходится иметь дело с E_6 и S_8. Метрика $S^{\mu\rho}$ берется при этом с сигнатурой $(- + + + - - +)$.

Аффинная связность $\Gamma_{\mu\sigma}^\pi = \{^\pi_{\mu\sigma}\}$, естественно возникающая между касательными пространствами E_6 в исходном римановом пространстве, порождает вполне определенную аффинную связность $\Gamma_{\mu b}^a$ и между спинорными пространствами S_8 (также привязанными по одному к каждой точке риманова пространства). Для этого достаточно потребовать, чтобы связность $\Gamma_{\mu\sigma}^\pi$, $\Gamma_{\mu b}^a$ при переходе от E_6, S_8 в данной точке к E_6, S_8 в бесконечно близкой точке сохраняла бы спинорное представление в S_8 клиффордовой алгебры в E_6, а также сохраняла бы тензоры $g_{\dot a b}$ и $\Pi_b^{\dot a}$ в S_8 (предварительно пронормированные каким-либо образом). В результате ковариантное дифференцирование ∇_φ в римановом пространстве распространяется и на тензоры с латинскими индексами, т. е. на тензоры в локальных спинорных пространствах S_8.

Автор фиксирует в каждом S_8 некоторый (произвольно избранный) спинвектор ψ^a и рассматривает ковариантные дифференцирования со спинорными индексами ∇^a и $\overset{*}{\nabla}_a$, определенным образом конструируемые на основе ∇_φ и спинвектора ψ^a. По существу эти связности для дальнейшего роли не играют.

«Спинорная теория относительности» сводится к рассмотрению вышеописанной конструкции при добавочном требовании (вариационный принцип)

$$\delta \int R\sqrt{S}\,(dx) = 0,$$

где $\sqrt{S}\,(dx)$ — элемент объема в рассматриваемом римановом пространстве $x^1, \ldots, x^6$, а инвариант R имеет вид

$$R = {}^1/_2 N g_{\dot a b}\overline{\psi^{\dot a}}\psi^b + g_{\dot a b}\,\overline{(\nabla_\pi \psi^{\dot a})}\,\eta_c^{\pi b}\psi^c + g_{\dot b a}\,\overline{(\eta_c^{\pi b}\psi^c)}\nabla_\pi\psi^a,$$

N — скалярная кривизна риманова пространства.

Из вариационного принципа получается достаточно сложная система дифференциальных уравнений; автор придает большое значение тому, что часть этих уравнений имеет вид уравнений Дирака (хотя и для 8-мерных, а не 4-мерных спинвекторов). Связь с 4-мерным пространственно-временным континуумом устанавливается через изотропный конус в E_6 $\quad S_{\mu\rho}Z^\mu Z^\rho = 0.$

Этот конус, рассматриваемый как квадрика в проективном пространстве P_5 с однородными координатами $Z^1, \ldots, Z^6$, представляет собой 4-мерное конформное пространство сигнатуры $(+ + + -)$, т. е. пространство Минковского, рассматриваемое, однако, не с точностью до движений, как обычно, а с точностью до конформных преобразований (группа ∞^{15} преобразований). В этом направлении автор уже и ранее обобщал теорию относительности (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, **38**, 921).

В остальном физический смысл предлагаемой теории, как указывает и сам автор, неясен. Особенно неясна роль спинвектора ψ, 8-мерных спиноров и т. п. *П. К. Рашевский*

4907. Спинорная теория четырехполюсников. Пейн (Spinor theory of four-terminal networks.

Payne W. T.), J. Math. and Phys., 1953, 32, № 1, 19—33 (англ.)

Пусть V, I и V', I' — комплексные напряжение и сила тока соответственно на входе и выходе четырехполюсника. Предлагается рассматривать величины

$$S_1 = V / (1\Omega)^{1/2}, \quad S_2 = I (1\,\Omega)^{1/2} \qquad (1)$$

($1\,\Omega$ означает 1 *ом*) и аналогичные величины S_1', S_2' как компоненты спинора; при этом

$$S_1' = a_{11}S_1 + a_{12}S_2, \quad S_2' = a_{21}S_1 + a_{22}S_2, \qquad (2)$$

где a_{ik} — безразмерные коэффициенты, характеризующие четырехполюсник. Автор выясняет, какие четырехполюсники отвечают различным типам матриц $\| a_{ik} \|$, $i, k = 1,2$, главным образом унитарных и эрмитовых матриц. Значительная часть статьи посвящена известной геометрической интерпретации спиноров и различных типов преобразований (2). *М. А. Наймарк*

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

4908. О некоторых цепях плоских кривых или поверхностей. Лоран (Sur certaines chaînes de courbes planes ou de surfaces. Lorent H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 11, 456—473 (франц.)

В плоскости фиксируется декартова система координат с осями OX, OY и направление; произвольно взятой точке $A(X, Y)$ приводится в соответствие точка $P(x, y)$ пересечения окружности с центром в A и радиусом OA и прямой AP данного направления и ставится вопрос: что является местом точек P, когда точка A описывает данную линию? Заданную линию автор называет первым звеном цепи, место точек P — вторым; если точка A будет описывать второе звено, то P опишет третье звено и т. д.

Предполагая, что $AP \| OX$, автор находит формулы, выражающие X, Y через x, y, устанавливает уравнения и рассматривает характерные особенности 2—3 звеньев цепи, первыми звеньями которых являются

$$X = a,\ bX + aY = ab,\ XY = a^2,\ Y^2 = 2pX,$$

$$X^2 + Y^2 = r^2,\ X^2 - Y^2 = a^2,\ X^2Y^2 = a^2(X^2 + Y^2).$$

Предыдущие задачи обобщаются на пространство: 1) Точка A есть центр сферы (A, OA), прямая, проходящая через точку A в данном направлении, пересекает эту сферу в точках P. Что является местом точек P, когда точка A описывает данную поверхность? 2) Точка A есть центр сферы (A, OA); плоскость, проходящая через точку A в данном направлении, пересекает эту сферу по окружности (C). Что образует множество окружностей (C), когда множество точек A есть данная линия?

Имеются опечатки. В основных формулах раздела II (стр. 462) допущена ошибка, не устраненная при дальнейшем изложении. Утверждение в п. п. 9, 11, 12, 14, 15, 16 о том, что ось OY касается кривой в точке O, ошибочно. *К. К. Мокрищев*

4909. О применении меры площади многоугольника вместо аксиом отражения в аксиоматике планиметрии. Бернайс (Über die Verwendung der Polygoninhalte an Stelle eines Spiegelungsaxioms in der Axiomatik der Planimetrie. Bernays Paul), Elem. Math., 1953, 8, № 5, 102—107 (нем.)

Гильберт в своих «Основаниях геометрии» показал, что аксиома конгруентности III 5 при наличии аксиом I, II, IV групп и остальных аксиом III группы равносильна этой аксиоме в узком смысле, т. е. для одинаково ориентированных треугольников, и предположению, что углы при основании равнобедренного треугольника конгруентны. В геометрии, в которой это последнее предложение не выполняется, меры площадей не складываются при составлении многоугольников — прямоугольник равновелик по дополнению своей части.

Доказывается, что аксиомы: 1) меры площадей складываются при составлении многоугольников, причем конгруентные многоугольники имеют равные меры площади, и 2) всякий угол, лежащий внутри данного угла и имеющий с ним общую вершину, меньше данного угла — имеют своим следствием равенство углов при основании равнобедренного треугольника.

При помощи аксиомы о параллельных доказываются теорема о сумме углов треугольника и теорема: если в четырехугольнике $ABCD$ углы при A и B прямые и стороны AD и BC конгруентны, то углы при D и C прямые, а стороны AB и DC конгруенты. В силу аксиомы о мере площади из равенства мер площадей двух квадратов следует конгруентность их сторон (теорема A). Справедлива теорема: если два прямоугольника со сторонами a, d и b, c равновелики, то одинаково ориентированные прямоугольные треугольники со сторонами a, b и c, d имеют конгруентные углы.

При помощи теоремы Пифагора получаем, что соответственные углы двух неодинаково ориентированных прямоугольных треугольников с попарно конгруентными катетами конгруентны. Поэтому, если в треугольнике высота совпадает с медианой, то углы при основании конгруентны, а в силу теоремы Пифагора и теоремы A он является равнобедренным. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других. В силу последних двух теорем, если у треугольника углы при основании конгруентны, то он равнобедренный, откуда следует обратное искомое предложение. *М. В. Васильева*

4910. Решеткообразное заполнение плоскости без пересечения дуг. Торнхейм (Lattice packing in the plane without crossing arcs. Tornheim Leonard), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 734—740 (англ.)

Пусть Λ — решетка (параллельная) на плоскости E, S — точечное множество, тогда $S + \Lambda$ называется решеткообразным заполнением плоскости, если $S + \lambda$ и $S + \lambda'$ не имеют общих внутренних точек при $\lambda \neq \lambda'$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$. Автор называет $S + \Lambda$ решеткообразным заполнением без пересечения дуг, если ни одна дуга из $S + \lambda$ не пересекает дуги из $S + \lambda'$, $\lambda \neq \lambda'$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ (понятие пересечения дуг уточняется). Выводится достаточное условие того, чтобы $S + \Lambda$ было без пересечения дуг.

В. А. Ефремович

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

4911. Об овалах типа n. У Дэ-тао (論n型卵形線.吳德濤), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 3, 213—217 (кит., резюме англ.)

Овалом типа n называется овал C, у которого коэффициенты Фурье a_k, b_k радиуса кривизны $\rho(\varphi)$ равны нулю при $k = 1, 2, \ldots, n$ и хотя бы один из коэффициентов a_{n+1}, b_{n+1} отличен от нуля.

Овал типа $2(2m+1)$ имеет по меньшей мере $2m+3$ описанных квадрата ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

На овале типа n имеется по меньшей мере $n+1$ или $n+2$ (в зависимости от того, будет ли число n нечетным или четным) пар противоположных точек таких, что сумма радиусов кривизны в каждой паре достигает экстремума.

Эти теоремы обобщают теоремы, данные Ганапатхи для овалов Су ($m = 0$) (Ganapathi P., Math. Z., 1934, **38**, 490—491; 687—690). *Из резюме автора*

4912. Куски выпуклой поверхности. Хартман, Винтнер (On pieces of convex surfaces. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 3, 477—487 (англ.)

Рассматривается поверхность S, определяемая уравнением $z = z(x, y)$ в выпуклой окрестности D точки (0, 0) при условии строгой выпуклости $z[(x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2] < [z(x_1, y_1)+z(x_2, y_2)]/2$ или просто выпуклости (когда знак $<$ заменяется знаком $\leqslant$). Пусть $X = X(x, y, z(x, y))$ — радиус-вектор точки поверхности S, $N = N(\lambda, \mu, \nu)$ — единичная нормаль. Доказывается:

1. Если S строго выпукла и принадлежит классу C^1, то ее опорная функция $H = XN$ относительно параметров λ, μ также принадлежит классу C^1 (хотя $X(\lambda, \mu)$ — функция класса C^0).

2. Если $z = z(x, y)$ — строго выпуклая функция класса C^1, то $h = xp + yq - z$ (где $p = z_x(x, y)$, $q = z_y(x, y)$), как функция p, q, строго выпукла и относится к классу C^1; при этом $x = h_p(p, q)$, $y = h_q(p, q)$ (предложение (1) следует из предложения (2)).

3. Пусть $z = z(x, y)$ — выпуклая функция класса C^1 и c — постоянная такая, что

$$\alpha = x - cz_x(1 + z_x^2 + z_y^2)^{-1/2},$$

$$\beta = y - cz_y(1 + z_x^2 + z_y^2)^{-1/2}$$

определяют взаимно однозначное непрерывное отображение D на (α, β)-область (например, $c < 0$). Тогда $Y = (\alpha, \beta, \gamma)$, где $\gamma = z + c(1 + z_x^2 + z_y^2)^{-1/2}$, определяет поверхность Σ класса C^1 причем $Y = (\alpha, \beta, \gamma(\alpha, \beta))$ представляет собой C^1-параметризацию (поверхность Σ параллельна поверхности S; если $c < 0$, то $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ — выпуклая функция). Эти предложения нельзя усилить (если на данные объекты наложить условия аналитичности, то и в этом случае объекты, к которым относятся утверждения, могут не принадлежать классу C^2).

Приложение к статье посвящено задаче реализации заданной на сфере метрики положительной кривизны. Приводится пример метрики класса C^2 с гауссовой кривизной $K > 0$ класса C^1, которая не может быть реализована овалоидом класса C^3. Указывается на возможность обобщения при замене классов C^2, C^1, C^3 соответственно классами C^n, C^{n-1}, C^{n+1} ($n > 1$). *Н. В. Ефимов*

См. также: 4701, 4721, 4722, 4743, 4794

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

4913. Условия устойчивости при численном решении параболических дифференциальных уравнений. Дю-Фор, Франкел (Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations. Du Fort E. C., Frankel S. P.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 43, 135—152 (англ.)

Исследуются условия устойчивости конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих параболические дифференциальные уравнения в частных производных. Разностное уравнение

$$(\varphi_{n,\,j+1} - \varphi_{n,\,j})/\Delta t = p_n(\varphi_{n-1,\,j} - 2\varphi_{n,\,j} + \varphi_{n+1,\,j})/(\Delta x)^2, \qquad (1)$$

аппроксимирующее уравнение диффузии

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = p(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\quad p(x) > 0, \qquad (2)$$

называется неустойчивым, если существует решение уравнения (1)

$$\varphi_{n,\,j} = K^j\lambda_n,\quad \lambda_0 = \lambda_N = 0,$$

такое, что $|K| > 1$; в противном случае (1) называется устойчивым. Уравнение (1) устойчиво, если

$$\sigma = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leqslant \frac{1}{2p_M}, \qquad (3)$$

где p_M — наибольшее собственное значение p для системы $-4p\lambda_n = p_n(\lambda_{n-1} - 2\lambda_n + \lambda_{n+1})$; $n = 1, 2, \ldots, N-1$. На примере уравнения диффузии

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r};\ \varphi(r, 0) = F(r);\ \varphi(1, t) = a;\ \varphi(R, t) = b,$$

сводящегося к уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = e^{-2x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\quad \varphi(x, 0) = \Phi(x);\quad \varphi(0, t) = a;\quad \varphi(\ln R, t) = b,$$

показывается обременительность условия устойчивости (3) для вычисления по схеме (1).

Строится разностное уравнение, аппроксимирующее (2), устойчивое при любом соотношении шагов Δx и Δt. Оно имеет вид:

$$\varphi_{n,\,j+1} = \varphi_{n,\,j-1} + \alpha_n(\varphi_{n-1,\,j} - 2\varphi_{n,\,j-1} + \varphi_{n+1,\,j}),\ \text{где } n + j \text{ — нечетно},$$

$$\alpha_n = \frac{2p_n\sigma}{1 + 2\sigma p_n},\quad \sigma = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \qquad (4)$$

При $p(x) = \text{const}$, $\alpha_n = \text{const}$ синусоидальная компонента $\lambda_{nj} = K^j e^{in\gamma}$ для всех γ имеет $|K| \leqslant 1$. В общем случае рассматривается функция погрешности

$$\varphi_{nj} = K^j \lambda_n, \ \lambda_n = \lambda_N = 0$$

(или при других граничных условиях $\lambda_1 - \lambda_0 = A\lambda_0$, $\lambda_{N-1} - \lambda_N = B\lambda_N$, $A > 0$, $B > 0$), тогда $\lambda_{n-1} + \lambda_n(1 - K^2 - 2\alpha_n) / K\alpha_n + \lambda_{n+1} = 0$. Оказывается, что $|K| < 1$, т. е. (4) устойчиво при любом $\sigma > 0$. Необходимым условием сходимости решения разностного уравнения (4) к решению уравнения (2) является одновременное стремление к нулю Δx и $\Delta t / \Delta x$ (если $\Delta t / \Delta x = c$, то (4) аппроксимирует гиперболическое уравнение $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, а не (2)). Сходимость метода при этих условиях не доказывается. В качестве иллюстрации показывается применение уравнения (4) к решению уравнений диффузии

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \ \varphi(x, 0) = 1, \ \varphi(0, t) = 0$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \ r \geqslant 1, \varphi(1, t) = 0, \ \varphi(r, 0) = 1.$$

В конце работы делается попытка построить «устойчивую» в некотором смысле конечно-разностную схему, пригодную для решения общего линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = p(x, t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + q(x, t)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + r(x, t)\varphi. \quad (5)$$

Уравнение (5) заменяется разностным уравнением

$$(\varphi_{n, j+1} - \varphi_{n, j-1}) / 2\Delta t = p_{n, j}(\varphi_{n+1, j} - \varphi_{n, j+1} - \varphi_{n, j-1} + \varphi_{n-1, j}) / (\Delta x)^2 + q_{nj}(\varphi_{n+1, j} - \varphi_{n-1, j}) / 2\Delta x + r_{nj}(\varphi_{n, j+1} + \varphi_{n, j-1}) / 2; \quad (6)$$

$$n + j \text{ — нечетно}, \ p(x, t) \geqslant 0, \ \left| q\frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leqslant 1,$$

$$|r\Delta t| \ll 1.$$

На каждом этапе вычислений (по j) область уже вычисленных значений $\varphi_{n, j}$ ограничена «фронтом» $\varphi_{n, j(n)}$, где $\varphi_{n, j}$ вычислены для $j \leqslant j_n$ ($j(n+1) = j(n) \pm 1$; $j + n$ — четно). Если $q \equiv r \equiv 0$, то $F = \sum_n (\varphi_{n, j(n)} - \varphi_{n-1, j(n-1)})^2$ монотонно уменьшается при переходе от $j(n)$ к $j(n) + 2$, что свидетельствует о своего рода «устойчивости» схемы (6). Подобная «устойчивость» имеет место для уравнения (6), если

$$r \equiv 0, \ \left| q\frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leqslant 1, \ \left| q\frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leqslant 2p\sigma. \quad (7)$$

В случае невыполнения (7) вместо F монотонно убывает функция «фронта»

$$M = \sum_n \left(1 \pm q\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(\varphi_{n, j(n)} - \varphi_{n-1, j(n-1)})^2.$$

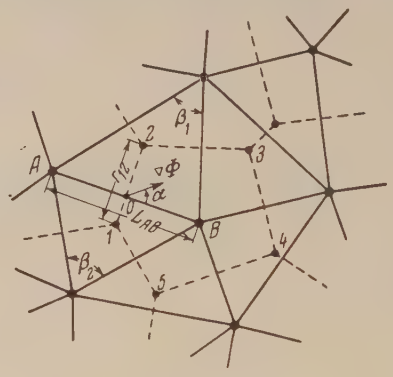
Л. И. Камынин

4914. Применение асимметрических сеток для решения краевых задач. Макнил (An asymmetrical finite difference network. Mac Neal R. H.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 295—310 (англ.)

Уравнение $\nabla(\sigma\nabla\varphi) + \tau = 0$ с заданными на границе значениями φ или ее нормальной производной решается при помощи асимметрической сетки с произвольным расположением узлов, физически реализуемой в виде электрической цепи из сопротивлений. При этом искомая функция φ равна значениям потенциала в узлах сети; σ — проводимость; τ — плотность тока внешних источников. Интерпретируя $V_B - V_A = \int_A^B \nabla\varphi \, dl$ как разность потенциалов между соседними узлами, $I_{AB} = -\int_1^2 \sigma(\nabla\varphi \cdot n) \, dr$, где n — единичный вектор нормали к dr, как силу тока, автор получает разностное уравнение (закон Кирхгофа), аппроксимирующее данное уравнение в узле B (см. чертеж),

$$\sum_p \sigma_0 \left(\frac{r_{Bp}}{l_{Bp}}\right)(V_p - V_B) + \tau_B A_B = 0,$$

где l_{Bp} — расстояние между B и соседним узлом p; r_{Bp} — длина отрезка (на чертеже обозначен пунктиром), пересекающего B_p; A_B — площадь многоугольника, вершины которого обозначены *1*, *2*, *3*, *4*, *5*; σ_0 — значение проводимости в середине AB.



К реф. 4914

Применение электрических моделей из асимметрических сеток позволяет обойти трудности, связанные с криволинейностью границы. Более существенное преимущество асимметрических сеток заключается, по мнению автора, в возможности измельчения в любом участке (в частности, вблизи границы внутри острых углов) сетки с моделированием данного уравнения во вновь полученных узлах. При этом важно, чтобы матрица коэффициентов разностных уравнений, соответствующая новой сетке, осталась симметричной, ибо в противном случае задача не моделируется. Приводится несколько образцов, иллюстрирующих это измельчение сетки в отдельных местах. Имеется пример на решение задачи о собственных значениях при помощи моделирования асимметрической электрической сеткой.

Возникшая при этом трудность «отрицательных» сопротивлений обойдена посредством введения во всех узлах емкостных сопротивлений.

Пользуясь обычными приемами разложения в ряды Тейлора, для узлов некоторых сеток даются оценки погрешности в аппроксимации оператора Лапласа. Порядок малости этих оценок зависит от типа узла. Никаких оценок ошибки в решении автор не дает. *В. К. Саульев*

4915. Вариационные методы решения задачи кручения для многосвязных областей. Линь Хун-сунь (具複連通截面柱體的扭轉問題的變分解法. 林鴻蓀), 物理學報 (Улисюэбао, Acta phys. sinica), 1953, **9**, № 4, 221—237 (кит.; резюме англ.)

Строятся двусторонние оценки жесткости при кручении для упругого стержня с многосвязным поперечным сечением. Если α — угол закручивания на единицу длины стержня и $\alpha\varphi(x, y)$ — смещение в направлении его оси, то, как известно, $\varphi(x, y)$ можно определить как функцию, реализующую минимум интеграла

$$I(\varphi) = \iint\limits_R \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)^2\right] dx\,dy$$

(R — область поперечного сечения стержня) при естественных краевых условиях. Минимальное значение интеграла $I(\varphi)$ как раз и дает величину жесткости при кручении, поэтому, если $\varphi^*(x, y)$ — произвольная допустимая функция, а D — жесткость при кручении, то оценка D сверху дается неравенством $D \leqslant I(\varphi^*)$.

Пусть область R ограничена извне кривой C_0, а изнутри кривыми C_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть функция $\Psi^*(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\Psi^* = \begin{cases} 0 & \text{на } C_0, \\ k_i^* & \text{на } C_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

где k_i^* — постоянные. Автор устанавливает неравенство, дающее оценку D снизу,

$$D \geqslant \frac{\left(2\iint\limits_R \Psi^*\,dx\,dy + 2\sum\limits_{i=1}^{m} k_i^* A_i\right)^2}{\iint\limits_R \left[\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy}.$$

Здесь A_i — площадь, ограниченная кривой C_i. *С. Г. Михлин*

4916. Минимальный принцип для решения уравнения пластин. Бергер (Ein Minimalprinzip zur Auflösung der Plattengleichung. Berger E. R.), Öster. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 1, 39—49 (нем.; резюме англ., франц.)

С помощью известного приема Фридрихса дается преобразование принципа минимума полной потенциальной энергии для тонких пластин в другой вариационный принцип, который в случае однородных граничных условий совпадает с принципом минимума потенциальной энергии деформации. Последний, как отмечает автор, был использован Вегнером (Wegner, Forschungsh. Stahlbau, 1943, **6**, 183—189) для решения уравнения пластин при некоторых типах граничных условий. Предлагаемый автором метод является обобщением известного метода Трефтца, так как функции сравнения должны удовлетворять дифференциальному уравнению. Эти функции должны удовлетворять также естественным граничным условиям. Указывается, что при однородных граничных условиях принцип автора дает возможность оценивать потенциальную энергию снизу. Отметим еще выполненное в статье преобразование выражения для энергии деформации к виду

$$\frac{K}{2}\left[\int\limits_\Omega (\Delta v)^2\,d\Omega + (1-\mu)\oint\left(\frac{\partial\nabla v}{\partial s} \times \nabla v\right) ds\right]. \quad (1)$$

Для случая опертой пластины

$$\frac{\partial\nabla v}{\partial s} \times \nabla v = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2,$$

где ρ — радиус кривизны контура, который следует считать положительным, если центр кривизны лежит на внутренней нормали к контуру.

Опечатка: в формуле (1) перед поверхностным интегралом следует изменить знак. *М. Ш. Бирман*

4917. О методах решения задач с закрепленными концами в вариационном исчислении. Стейн (On methods for obtaining solutions of fixed end-point problems in the calculus of variations. Stein Marvin L.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **50**, № 5, 277—297 (англ.)

Работа посвящена применению методов функционального анализа к решению системы дифференциальных уравнений Эйлера, к которой приводит указанная в заголовке задача, а также несколько более общей системы

$$\frac{d}{dx} g_i(x, y, y') = h_i(x, y, y') \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (1)$$
$$y = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)).$$

Двукратным интегрированием эта дифференциальная система преобразуется в интегральную

$$T(y, y') = 0, \quad (2)$$

которая рассматривается как функциональное уравнение в пространстве дифференцируемых функций C^1.

Прежде всего изучается применение метода Ньютона (для дифференциальных систем по существу совпадающего с методом Чаплыгина). Предварительно исследуется сходимость для абстрактного функционального уравнения в пространстве U типа B

$$S(y) = 0$$

метода, более общего, чем метод Ньютона, в котором последовательные приближения определяются из уравнения

$$S(y^{(i)}) + K(y^{(i)};\quad y^{(i+1)} - y^{(i)}) = 0,$$

где $K(y; \eta)$ — некоторый линейный относительно η оператор, преобразующий пространство $U \times U$ в U. Сходимость этого процесса к единственному решению устанавливается (теорема 1) в предположениях: в некоторой окрестности решения 1) оператор $K(y; \eta)$ представляет приближенный дифференциал для S; 2) оператор, обратный для K по η: $K^{-1}(y; \eta)$,

удовлетворяет условию

$$\| K^{-1}(y^{(1)}; \eta) - K^{-1}(y^{(2)}; \eta) \| \leqslant M \| y^{(2)} - y^{(1)} \| \cdot \| \eta \|$$

для некоторой константы M; 3) для начального приближения $\| S(y^{(0)}) \|$ достаточно мала. В случае, если K есть дифференциал S и притом отклонение его от приращения S второго порядка малости, то устанавливается (теорема 3) квадратичный порядок сходимости процесса Ньютона.

Условия этих теорем неудобны для проверки и в них не дано точных оценок, однако они отличаются большей общностью рассматриваемых процессов по сравнению с имевшимися (см. Канторович Л. В., Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6 (28), 89—185).

Применимость этих теорем к дифференциальным проблемам устанавливается элементарным изучением свойств оператора T в функциональном пространстве. Показывается, что оператор δT имеет линейный обратный, если концевые точки не сопряженные, т. е. соответствующая граничная проблема для уравнения в вариациях, составленного для (1), имеет единственное решение. В результате применения теоремы 3 устанавливается, что если указанное условие выполнено для начального приближения и оно достаточно хорошо удовлетворяет уравнению, то имеет место сходимость процесса Ньютона (теорема 4). Эти результаты специализируются для вариационной проблемы (теоремы 5,6). В разделе 10 производится несколько более общее рассмотрение, когда вместо класса C^1 рассматривается пространство систем функций, производные которых интегрируемы с квадратом. (Применение аналогичных теорем о функциональных уравнениях к дифференциальным системам рассматривалось Г. П. Акиловым, Докл. АН СССР, 1949, 68, 645.)

Наконец, автор рассматривает вариант метода наискорейшего спуска, который для случая квадратичного и некоторых других функционалов был уже изучен. Сходимость установлена в условиях, которые, вообще говоря, выполняются, если мы находимся вблизи точки минимума. Никаких заключений о быстроте сходимости не делается. Приведен численный пример (задача о минимальной поверхности вращения).

Автор полагает, что оба метода эффективны при использовании быстродействующих машин.

Л. В. Канторович

4918. Процесс Больтца и алгоритм Гаусса. Готхардт (Boltzsches Entwicklungsverfahren und Gaußscher Algorithmus. Gotthardt E.), Z. Vermessungswesen, 1953, **78**, № 4, 97—104 (нем.)

Решение системы $Ax + By = w_1$, $Cx + Dy = w_2$ (x, w_1 — m-мерные, y, w_2 — n-мерные векторы; A, B, C, D — матрицы) можно получать аналогично решению методом исключения Гаусса системы $ax + by = w_1$, $cx + dy = w_2$ (a, b, c, d, x, y, w_1, w_2 — числа). Эта аналогия, рассмотренная также более чем для двух уравнений, подробно обсуждается в статье для систем нормальных уравнений. Рассматриваются возможности, возникающие в том случае, если некоторые из коэффициентов-матриц обращаются в нуль.

А. А. Абрамов

4919. К вопросу о решении системы линейных алгебраических уравнений методом последовательных приближений. Лейдерман Ю. Р., Докл. АН УзССР, 1953, № 10, 6—9 (русск.; резюме узб.)

Основным результатом является некоторое уточнение известного приема Л. А. Люстерника (Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1947, **20**, 49—64) для улучшения сходимости итерационного метода при решении систем линейных уравнений $x = \lambda Ax + f$. Применение формулы автора требует знания первых двух собственных значений матрицы A.

Как и в предыдущей работе (РЖМат, 1953, 902), автор небрежно излагает полученные результаты, смешивая в тексте и обозначениях векторы и числа. Имеются опечатки.

В. Н. Фаддеева

4920. Решение уравнений погрешностей по способу наименьшего предельного уклонения. Успенский А. К., Сб. статей по геодезии, 1953, № 4, 69—83

Определение по способу наименьших квадратов вероятнейших значений неизвестных x из системы несовместных уравнений погрешностей вида

$$v_i = a_i x_1 + b_i x_2 + \cdots + h_i x_k + l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

при $n > k$ требует выполнения большого объема вычислений, особенно при значительном числе неизвестных. Поэтому автор предлагает приближенный способ решения уравнений (1), а именно способ наименьшего предельного уклонения, который, по мнению автора, проще способа наименьших квадратов и дает результаты, близкие к вероятнейшим, т. е. к тем, которые получаются по способу наименьших квадратов.

Сущность нового способа заключается в том, что вместо условия минимума функции $[v^2]$, автор ставит для уклонений v в уравнениях (1) условие

$$|v|_{\max} = \min, \qquad (2)$$

понимая его так: наибольшее по абсолютной величине уклонение v должно быть не больше самого крупного (по абсолютной величине) из уклонений, полученных любым иным способом.

Доказывается «свойство» (термин А. К. Успенского. *Прим. реф.*), заключающееся в том, что значения неизвестных x в уравнениях (1) удовлетворяют условию (2), если соблюдается следующее: а) для каждого неизвестного в уравнениях, содержащих это неизвестное, наибольшее положительное уклонение v равняется по абсолютной величине наиболее крупному отрицательному уклонению и б) число всех наибольших и равных между собой (по абсолютной величине) уклонений на единицу больше числа неизвестных, содержащихся в уравнениях с предельными уклонениями.

На основании этого «свойства» разработан практический прием приближенного решения уравнений погрешностей, удовлетворяющего условию (2). Приводится числовой пример решения 16 уравнений с 6 неизвестными.

Примечание референта. В статье нет оговорки о том, что все изложенное относится лишь к случаю, когда в уравнениях (1) свободные члены l независимы между собой и равноточны. Доказательства некоторых положений автора неубедительны. Так, например, автор пытается доказать, что при решении системы n уравне-

ний с одним неизвестным значение этого неизвестного, полученное методом автора, приближается к вероятнейшему значению, полученному по способу наименьших квадратов, если число уравнений увеличивается. Однако условие, при котором решаются уравнения по способу автора, никак не используется. Таким образом получается, что решение системы достаточно большого числа несовместных уравнений погрешностей при каком угодно условии дает такой же результат, как и решение по способу наименьших квадратов. *В. В. Попов*

4921. Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере. Диткин В. А., Люстерник Л. А., Вычисл. матем. и вычисл. техника (Ин-т точн. механ. и вычисл. техн. АН СССР), 1953, № 1, 3—13

Пусть ω — единичная сфера, ϑ и φ — сферические углы. Ранее авторами (Докл. АН СССР, 1948, 61, № 3, 441—444) была получена кубатурная формула

$$(4\pi)^{-1}\iint_{\omega} f d\omega = \frac{25}{840}\sum_{i=1}^{12} f(A_i) + \frac{27}{840}\sum_{j=13}^{32} f(A_j), \qquad (1)$$

где A_i — вершины вписанного в ω икосаэдра и A_j — вершины вписанного в ω додекаэдра, причем радиус oA_i, соединяющий центр сферы с вершиной икосаэдра, проходит через центр грани додекаэдра и обратно. Формула (1) верна для многочленов не выше пятой степени.

Дано приложение (1) к приближенному нахождению коэффициентов первых пяти гармоник в разложении произвольной функции, заданной на сфере, в ряд по сферическим функциям

$$f(\vartheta, \varphi) \approx a_{00} + \sum_{n=1}^{5}\Big[a_{n0}P_0(\cos\vartheta) + \sum_{k=1}^{n}(a_{nk}\cos k\varphi + b_{nk}\sin k\varphi)P_{n,k}(\cos\vartheta)\Big],$$

$$a_{nk} = \sum_{r=1}^{32} a^r_{nk} f(A_r), \qquad b_{nk} = \sum_{r=1}^{32} b^r_{nk} f(A_r).$$

Даны таблицы множителей a^r_{nk} и b^r_{nk}, вычисленные с семью знаками после запятой. Приведена также таблица координат точек $A_i (i = 1, 2, \ldots, 32)$. Авторы утверждают, что вычисление гармоник при помощи их таблиц менее трудоемко, чем вычисление при помощи методов, приводимых в некоторых курсах геофизики. *В. И. Крылов*

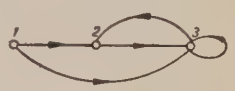
4922. Теория автоматизации решения системы двух алгебраических уравнений. Лебедев А. Н., Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1953, № 25, 28—39

Пусть решение системы уравнений $f_1(z_1, z_2) = 0$, $f_2(z_1, z_2) = 0$ (автор рассматривает случай, когда в уравнения входят также параметры) автоматизируется следующим образом.

Два следящих двигателя $СЛ_1$ и $СЛ_2$ подбирают величины ζ_1 и ζ_2, два управляющих приспособления $УП_1$ и $УП_2$ замеряют $f_1(\zeta_1, \zeta_2)$ и $f_2(\zeta_1, \zeta_2)$. Пусть они соответственно соединены ($СЛ_1$ с $УП_1$ и $СЛ_2$ с $УП_2$ или же $СЛ_1$ с $УП_2$ и $СЛ_2$ с $УП_1$) так, что угловая скорость вращения каждого следящего двигателя пропорциональна разности между заданием и отработкой соответствующего управляющего приспособления. Тогда ζ_1 и ζ_2 меняются по закону $\dot\zeta_1 = a_1 f_2(\zeta_1, \zeta_2)$, $\dot\zeta_2 = a_2 f_2(\zeta_1, \zeta_2)$ или $\dot\zeta_1 = a_1 f_2(\zeta_1, \zeta_2)$, $\dot\zeta_2 = a_2 f_1(\zeta_1, \zeta_2)$. Вычисывая для изменения f_1 и f_2 уравнение в вариациях вблизи $\zeta_1 = z_1$, $\zeta_2 = z_2$, автор легко получает условия того, что корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, т. е. что устройство находится в устойчивом режиме работы. Как отмечает автор, система $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ во всех рассмотрениях не обязана быть алгебраической. *А. А. Абрамов*

4923. Теория обратной связи.— Некоторые свойства графов путей прохождения сигналов. Мейсон (Feedback theory — Some properties of signal flow graphs. Mason Samuel J.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 9, 1144—1156 (англ.)

Сеть направленных ветвей, соединенных между собой в некоторых узлах, называется графом путей прохождения сигналов. Такой граф может интерпретироваться как система приемно-передающих станций. Станция, представленная некоторым узлом этого графа, получает сигналы через входящие в этот узел ветви, преобразует их и затем передает результат преобразования через исходящие из узла ветви. Если сигнал, исходящий из узла j, назовем x_j, то каждому графу путей передачи сигналов будет соответствовать некоторая система уравнений. Например, графу, изображенному на чертеже, соответствует следующая система уравнений:



К реф. 4923

x_1 — заданная величина,
$x_2 = f_2(x_1, x_3)$,
$x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$.

В реферируемой статье рассматриваются топологические свойства таких графов и излагаются методы их преобразования и упрощения. Большая часть статьи посвящена теории линейных графов сигналов, т. е. графов, у которых соответствующие уравнения линейны.

В конце статьи приведено несколько примеров применения полученных результатов к решению практических задач анализа систем с обратными связями.

Ссылок на какую-либо литературу в статье не содержится. Указывается, что целью статьи является изложение основ теории графов путей прохождения сигналов и что в последующих статьях автор изложит формальную матричную теорию таких графов и более подробно остановится на практических применениях теории. *В. И. Шестаков*

4924. Номограмма для расчета амортизации. Нью (Depreciation nomograms. New Ronald W.), Machinery (London), 1954, 84, № 2146, 33—35 (англ.)

Приводятся:

1) Две номограммы для формулы

$$p = 1 - \sqrt[n]{\frac{R}{I}},$$

содержащие шкалы величин $\frac{R}{I}$, N и p, $5 < N < 30$. Для одной $0{,}01 < \frac{R}{I} < 0{,}1$, для другой $0{,}1 < \frac{R}{I} < 0{,}5$.

2) Две номограммы для формулы

$$S = Kp,$$

содержащие шкалы величин K, S и p; $10 < K < 100$. Для одной $0{,}02 < p < 0{,}1$, для второй $0{,}1 < p < 0{,}6$.

Все номограммы типа N (с двумя параллельными и одной наклонной шкалой); I — начальная стоимость; S — остаточная стоимость (бросовая); p — годовой %; N — срок амортизации в годах; K — стоимость предприятия к началу года; S — амортизация за год.

В тексте приводится конкретный пример пользования номограммой, но он не нанесен (пунктирной линией) на номограммах. *И. Н. Денисюк*

4925. Номограмма для определения процента извлечения летучих веществ из смол посредством нагревания. Берли (Chart for determining per cent sludge digestion. Burley Fred H.), Water and Sewage Works, 1953, **100**, № 5, R-207 (англ.)

Номограмма, представляющая собой треугольный прямолинейный абак Массо, применяется для решения группы уравнений, сводящейся в конце концов к одному уравнению вида

$$\frac{x}{100 - x} \cdot \frac{100 - y}{y} = \frac{100 - z}{100}.$$

На всех сторонах треугольника шкалы равномерны. *Г. Е. Джемс-Леви*

4926. Номографическое определение стоимости автомобильного транспорта. Люнцман (Nomographische Bestimmungen der Kosten bei Kraftfahrzeugtransporten. Lünzmann K.), Holz-Zbl., 1953, **79**, № 67, 754—755 (нем.)

Приводятся три сложные составные номограммы (частью из выравненных точек, частью — сетчатые) для определения стоимости автомобильного транспорта в зависимости от большого числа (J — P) различных параметров. Формулы, по которым построены номограммы, не указываются. *Г. С. Хованский*

4927. Емкость горизонтальных цилиндров. Тарант (Contents of horizontal cylinders. Tarrant J.), Water and Sewage Works, 1953, **100**, № 5, R-210 — R-211 (англ.)

Приводится номограмма для определения емкости горизонтальных цилиндрических резервуаров, наполненных до высоты h. Данными являются: диаметр цилиндра и отношение высоты к диаметру. Определяются емкость в галлонах и объем в кубических футах на фут длины резервуара. Номограмма построена на параллельных шкалах. *Г. Е. Джемс-Леви*

4928. Номографическое определение центробежной силы сложного тела. Замель (Nomographische Bestimmung der Zentrifugalkraft komplizierter Körper. Sahmel P.), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1953, **95**, № 31, 1060 (нем.)

Предлагается графический способ для вычисления полярного статического момента плоского тела криволинейного очертания, основанный на использовании линейки со специальной шкалой и планиметра. *Г. С. Хованский*

4929 К. Универсальная вычислительная номограмма. Патлах Д. И., 11 стр., Изд-во Акад. архитектуры УССР (Днепропетровский инж.-строит. ин-т), Киев, 1953, 45 коп.

Приводится примитивная сетчатая номограмма формулы

$$N^k = x,$$

состоящая из логарифмических шкал N и x и пучка прямых k. К логарифмическим шкалам пристроены равномерные шкалы, что дает возможность использовать номограмму для выполнения действий деления и умножения. Кроме того, дополнительно приведена сдвоенная шкала для формулы $x = \ln N$. *Г. С. Хованский*

ТАБЛИЦЫ

4930. Тахеометрические таблицы для вычислений на арифмометре. Тамаш (Taniméteres táblázat gépi számításhoz. Tamás Zoltán), Földméréstani közlemények, 1953, 5, № 3, 158—162 (венг.; резюме франц.)

Описаны построение опубликованных автором таблиц для вычисления на арифмометре горизонтальных проложений линий и превышений, измеренных тахеометром с нитяным дальномером, и способ пользования ими. Таблицы содержат значения $100\cos^2\alpha$ и $100\sin\alpha\cos\alpha$ в пределах 0—44° со ступенью в 1′. При использовании арифмометра с достаточным числом знаков на результативном счетчике умножение табличных величин на разность отсчетов по дальномерной рейке может быть выполнено в один прием. *М. Л. Рудштейн*

4931 К. Пятизначные таблицы тригонометрических функций., 84 стр., Геодезиздат (Глав. упр. геодезии и картографии), М., 1953, 6 р. 25 к.

Значения шести основных тригонометрических функций даны для значений аргумента от 0 до 45° через 1 мин. с пятью десятичными знаками, а значения косеканса и котангенса, превосходящие соответственно 3,07155 и 2,90421, с пятью значащими цифрами. Указаны табличные разности и соответствующие таблички Р. Р. Особые таблицы содержат значения косекансов и котангенсов для значений аргумента от 0 до 1° через 1 сек. и для значений аргумента от 0 до 10° через 10 сек. с пятью значащими цифрами. Для значений аргумента, больших 45°, обычная вторая нумерация снизу и справа.

Имеются типографские дефекты. Некоторые отмечены на вклейке с заголовком «Замеченные опечатки» (выпавшие литеры, неясности оттиска), некоторые бросаются в глаза уже при беглом просмотре таблиц, как, например, лишняя горизонтальная линейка на стр. 62. Имеется неприятная пестрота в записи первых цифр табличных значений: они то даются, то пропускаются, и в последнем случае их надо брать выше, что особенно неудобно, когда приходится брать значения функций для значений аргумента, превосходящих 45°. Никакой экономии места эти пропуски не дают. *В. М. Брадис*

4932 К. Таблица биномиальных коэффициентов. Лоткин, Янг (Table of binomial coefficients. Lotkin M., Young M. E., Ballistic Research Laboratories Memo. Rep. № 625, 37 pp., Aberdeen Proving Ground, 1953), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 44, 236 (библ.)

4933 К. Таблица площадей плоских треугольников. Кекелия М. А., 112 стр., Госиздат Груз. ССР, Тбилиси, 1953, 3 р. 80 к.

См. также: 4729, 4730, 4744, 4745, 4813, 4815, 4817, 4820, 4821, 4826, 4844, 4846

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

4934. Диагностические программы и профилактический контроль в вычислительной машине «Вихрь-1». Даггетт, Рич (Diagnostic programs and marginal checking in the Whirlwind -1 computer. Daggett Norman L., Rich Edwin S.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, ч. 7, 48—54 (англ.)

Рассматриваются методы обнаружения места и характера неисправностей в вычислительной машине «Вихрь-1». Эти методы являются итогом четырехлетнего опыта эксплуатации машины «Вихрь-1» (РЖМат, 1953, 928; 1954, 4935).

Возможные неисправности вычислительной машины авторы делят на 4 группы: 1) уход номиналов деталей, 2) неисправности типа коротких замыканий и обрывов, 3) случайные или кратковременные неисправности и 4) неисправности, связанные с использованием в машине нового непроверенного оборудования.

Для контроля работы машины был разработан ряд специальных методов и устройств.

1. Встроенное в машину контрольное оборудование, представляющее собой 8 различных устройств, каждое из которых следит за правильностью того или иного действия, выполняемого машиной. Например, одно из устройств, проверяющее правильность передачи данных от одной части машины к другой, представляет собой специальный регистр, который получает передаваемые данные из двух разных мест: а) из главной шины, по которой происходят все передачи в машине, и б) из того места, куда эти данные были переданы,— по специальной контрольной шине.

2. Оборудование для профилактического контроля, которое является главным средством для обнаружения и предупреждения неисправностей из-за изменения с течением времени номиналов деталей. Профилактический контроль заключается в проверке работы различных узлов машины при подаче на вход питания этих узлов повышенного или пониженного напряжения. Для этого созданы специальные цепи распределения напряжений, при помощи которых вся машина делится на 200 секций, в каждой из которых можно менять напряжение независимо от других секций. Профилактический контроль благодаря своей гибкости позволяет предупреждать большое число обычно трудно выявляемых кратковременных неисправностей.

3. Контроль с программой, основанный на использовании специального устройства, позволяющего остановить машину на любом месте некоторой контрольной программы. Длина цикла, т. е. количество команд, выполняемых от остановки до остановки, определяется специальным устройством задержки. Машина снабжена триггерными индикаторами, которые позволяют непосредственно наблюдать за изменениями, происшедшими в машине после выполнения очередного цикла. Контроль с программой позволяет обнаруживать короткие замыкания, обрывы и некоторые другие типы кратковременных неисправностей.

4. Запись кратковременных неисправностей в машине «Вихрь-1» производится при помощи фотографирования во время работы машины триггерных и прочих световых индикаторов, выведенных на специальную контрольную панель, что позволяет детально проследить все этапы работы машины без лишней траты машинного времени.

Места, в которых возникают кратковременные неисправности, могут быть выявлены испытанием стоек на удар и вибрацию во время выполнения машиной контрольной программы.

Процесс обнаружения машинных неисправностей состоит во всестороннем использовании описанного выше специального оборудования, наряду с вводом в машину различных специальных программ, называемых диагностическими, каждая из которых составлена для обнаружения определенного класса ошибок. В работе кратко описываются основные этапы процедуры по выявлению машинных неисправностей.

Авторы утверждают, что тщательно продуманная и развитая методика выявления машинных неисправностей позволяет использовать для полезной работы 90% общего времени работы машины. В течение недели примерно 100 человеко-часов тратится на замену неисправного оборудования, 24 человеко-часа расходуется на профилактическую работу с машиной, выражающуюся главным образом в выполнении различных диагностических программ; средняя продолжительность непредвиденных остановок машины равна 20 мин. Эти результаты являются средними показателями работы машины «Вихрь-1» за последний год, предшествовавший написанию статьи. *А. П. Ершов*

4935. Численное определение кривых изменения сопротивлений. Уитт, Франкел, Портер (Digital computation of resistivity-departure curves. Witte Leendert, Frankel S. P., Porter J. D.), Oil and Gas J., 1953, **51**, № 39, 74—75 (англ.)

Обработка материалов электрогеологоразведки приводит к уравнению Лапласа в цилиндрических координатах. Дается краткое описание решения уравнения на электронной вычислительной машине «Вихрь-1» (Whirlwind-1) Массачусетского технологического института (см. фото). Машина имеет электростатическое запоминающее устройство на 1024 числа по 15 двоичных разрядов плюс разряд знака. Скорость сложения 48 μсек, скорость умножения 65 μсек.

Указывается, что расчет 22 точек одной кривой изменения сопротивлений требует 10 мин. машинного времени, за которые выполняется около 10 миллионов арифметических действий. Приведена схема программы. Упоминается, что стоимость машины «Вихрь-1» составила 10 миллионов долларов.

А. Л. Брудно

ведения или частного получается в одном регистре арифметического узла, а остальная часть — в другом.

Устройство управления построено по асинхронному принципу и имеет три основных блока: статическое программное устройство, динамическое программное устройство и счетчик сдвигов. Два послед-

Креф.4935

4936. Логическое построение Окриджской счетной машины. Перри (The logical design of the Oak Ridge digital computer. Perry C. L.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, September, 1953, 23—27 (англ.)

Окриджская счетная машина ОРАКЛЕ (ORACLE — Oak Ridge Automatic Computer and Logical Engine) является седьмой из серии машин, имеющих своим прототипом машину ИАС (РЖМат, 1953, 931; 1954, 3485). Остальные машины следующие: МАНИАК (РЖМат, 1954, 2349, 3100), ОРДВАК (РЖМат, 1954, 3490), АВИДАК (РЖМат, 1954, 1849), машина Иллинойсского университета (РЖМат, 1954, 3490), машина корпорации РАНД. Сделанные в ОРАКЛЕ улучшения были направлены на увеличение надежности, легкости эксплуатации и скорости машины. С целью уменьшения длины программы был добавлен целый ряд автоматических операций.

ОРАКЛЕ представляет собой машину параллельного счета, использующую одноадресный код и двоичное арифметическое устройство. Машина оперирует с 40-разрядными двоичными числами. Внутреннее запоминающее устройство на 2048 кодов сделано на электростатических трубках. Вспомогательное запоминающее устройство, которое позволяет вводить в машину и выводить из нее информацию, состоит из четырех магнитных лент и одной бумажной перфоленты. Содержимое внутреннего запоминающего устройства может быть оценено визуально.

Арифметический узел имеет три 40-разрядных двоичных регистра, два 41-разрядных регистра и 41-разрядный сумматор. 41-й разряд включен для определения переполнения. В машине используется система с фиксированной запятой, причем запятая стоит после нулевого разряда (знак). Предусмотрено выполнение умножения и деления с двойной точностью. При этом первая половина произ-

них управляют внутренним циклом арифметического узла при выполнении какой-либо операции. Управление внутренним запоминающим устройством состоит из быстрого счетчика, медленного счетчика, счетчика регенерации и сумматора отклоняющих напряжений. Кроме этого имеется устройство для выбора адресов.

В 40 разрядах любой ячейки запоминающего устройства могут храниться две одноадресных команды. В каждой инструкции первые девять разрядов заняты кодом операции, остальные одиннадцать — адресом числа или команды, или же числом, указывающим количество сдвигов.

Машина имеет следующие операции.

1. Арифметические действия: 8 различных видов сложения и вычитания (например, сложение с предварительным гашением регистров арифметического узла и без него, сложение алгебраическое и по модулю и т. д.); 2 вида умножения (с округлением и без него); 4 вида деления (с двойной точностью с округлением и без него, без двойной точности с округлением и без него); 8 видов сдвигов вправо и 8 видов сдвигов влево.

2. Операции по передаче управления: 2 операции безусловной передачи управления (влево и вправо), 4 операции условной передачи по переполнению (влево, вправо, с переполнением, без переполнения), 4 операции условной передачи по знаку (знак положительный, знак отрицательный, влево, вправо).

3. Операции по передаче данных из регистра в регистр.

4. Операции, связанные с работой на вспомогательном запоминающем устройстве, например, движение ленты вперед, назад, остановка, чтение, запись и т. д.

5. Операции общего назначения: стоп и пр.

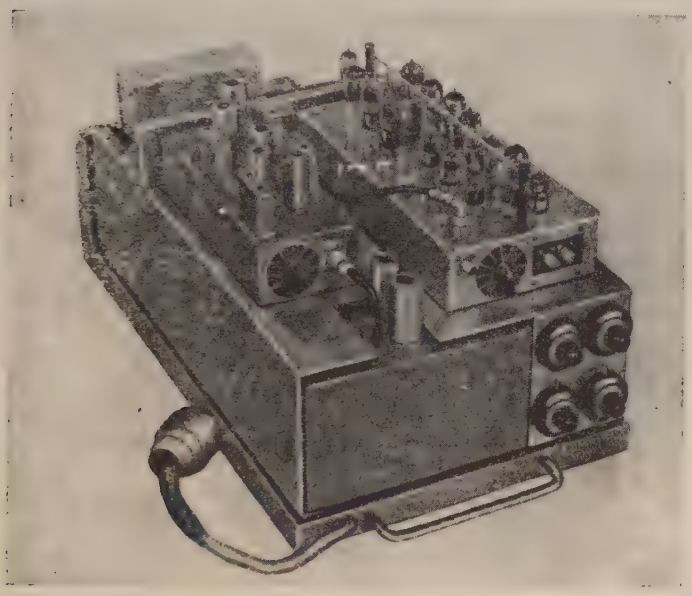
Управление машиной сосредоточено на пульте. Машина может работать автоматически и на шагах. Программу можно остановить на любой команде.

Динамическое программное устройство можно синхронизировать с любой частотой в пределах рабочего диапазона частот для арифметического узла.

Л. С. Легезо

4937. Автоматическая вычислительная машина Окриджской лаборатории. Чжу (The Oak Ridge automatic computer. Chu J. C.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 September, 1953, 142—148 (англ.)

Окриджская вычислительная машина (см. реф. 4936) является параллельной машиной с асинхронным устройством управления, с двоичным арифметическим узлом, работающим по системе с фиксированной запятой. Основные характеристики машины: емкость регистров арифметического узла 40 разрядов; время пробега в сумматоре 5 μсек; время на один сдвиг 6 μсек; время умножения 240—440 μсек; время деления 440 μсек; количество двоичных цифр, представляющих число, 40; количество двоичных



К реф. 4937

цифр, представляющих код операции, 9; количество двоичных цифр, представляющих адрес числа, 11; максимальное время выбора числа из запоминающего устройства 20 μсек; время регенерации всего объема запоминающего устройства 40,96 мсек; количество операций 77; общее количество ламп 3000. При проектировании машины было принято, что каждый схемный элемент имеет свою узкую область применения. В связи с этим было сделано отступление от принципа общей стандартизации блоков. В машине широко применяются электронные лампы и кристаллические диоды, триоды и пентоды, синхронные и асинхронные элементы, приемные и передающие лампы, связи по переменному и постоянному току.

Регистры арифметического узла имеют 5 ламп на каскад, сумматор арифметического узла имеет 9 ламп на каскад. В регистрах используются несимметричные мультивибраторы. Статическое программное устройство, служащее для расшифровки кодов операций, построено по принципу неполной диодной матрицы и имеет около 100 ламп. Динамическое программное устройство управляет работой арифметического узла и насчитывает около 60 ламп.

Внутреннее запоминающее устройство на электроннолучевых трубках работает в двух режимах: либо с объемом 1024 адреса, либо с объемом 2048 адресов. В обоих случаях нуль представляется на экране в виде точки, а единица — черточки. Чтение осуществляется при помощи сфокусированного в точку луча. При работе на 1024 адресах в каждом разряде параллельно работают две трубки, причем время чтения информации из одной трубки смещено по отношению к другой в пределах максимального времени выбора числа. При считывании с любого адреса какой-либо трубки сигнала «единица», последняя записывается на обеих трубках на этом же адресе. Такой метод позволяет устранить влияние дефектов экрана. При работе на 2048 адресах каждая трубка работает самостоятельно. Содержимое одной из них регенерируется в течение первой половины большого цикла (полного времени регенерации), содержимое второй—в течение второй половины большого цикла. Так как регенерация единицы осуществляется при помощи подсветки черточкой, то средний ток луча сильно зависит от записываемых данных. Для стабилизации тока луча применяется автоматическая система подачи смещения в катоды трубок. Напряжение смещения вырабатывается при помощи сравнения сигнала единицы, хранящейся на нулевом адресе, с эталонным напряжением.

В качестве входных и выходных устройств в машине используются магнитные ленты и телетайп. Скорость ввода с телетайпа составляет 24 знака в 1 сек., скорость вывода с пунширование ленты составляет 15 знаков в 1 сек.

В статье приводится блок-схема машины и краткое ее описание, описываются работа сдвигающего регистра и схемы для гашения регистра и его возбуждения; кроме этого имеется блок-схема внутреннего запоминающего устройства, нагрузочные характеристики мультивибратора на лампе и фотографии блока запоминающего устройства (см. фото). *Л. С. Легезо*

4938. Запоминающее устройство на 4 миллиона чисел в быстрейшей в мире вычислительной машине (4 million-word memory in world's fastest computer), Lab World, 1953, 4, № 10, 262 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине ОРАКЛЕ, построенной в Аргоннской лаборатории (США) для лаборатории в Окридже (см. реф. 4936, 4937). Помимо внутреннего запоминающего устройства на 2048 12-разрядных чисел, машина имеет вспомогательное запоминающее устройство на магнитной ленте на 4 миллиона чисел.

Машина производит операции со скоростью 20 000 сложений или 2000 умножений в 1 сек.

Н. Я. Матюхин

4939. Фирма «Хьюз» делает упор на новое. Класс (Hughes Aircraft Co. accents the new.

Klass Philip), Aviat. Week, 1953, **58**, № 26, 44—46, 48—50, 52, 55 (англ.)

Описание постановки производства на заводе фирмы «Хьюз» в Калвер-Сити, Калифорния (Culver City, Calif.). Указывается, что фирма работает над самолетным цифровым вычислительным устройством, которое сможет быть использовано для навигации, управления огнем и других авиационных задач. Целью является создание одного универсального цифрового вычислительного устройства, которое сможет заменить различные непрерывные счетно-решающие устройства старого типа, каждое из которых разрабатывалось только для какой-нибудь одной задачи. Ссылка на статью того же автора (Aviat. Week, 1952, **57**, № 26,27—29), в которой указывается, что фирма «Хьюз» работает над созданием цифровых вычислительных устройств для управления огнем, бомбометания и навигационных целей, в связи с постройкой этой фирмой систем управления огнем для самолетов F-86D, F-94C, F-89, «Конвер» F-102, «Рипаблик» F-103. В этой статье перечисляются недостатки вычислительных устройств непрерывного действия, повсеместно применяемых в настоящее время для указанных выше целей, и преимущества цифровых вычислительных устройств.

К недостаткам вычислительных устройств непрерывного действия автор относит: 1) накопление ошибок при вычислениях; 2) сильную зависимость конструкции от назначения устройства. Как указывает автор, вычислительное устройство непрерывного действия, спроектированное для управления стрельбой, нельзя легко приспособить, например, для решения навигационных задач; 3) зависимость точности от размеров. Повышение точности, вообще говоря, требует увеличения масштабов, что приводит к увеличению размеров и утяжелению деталей; 4) сложность производства, так как для устройств непрерывного действия обычно требуются сверхточные потенциометры, зубчатые передачи, эксцентрики и т. п., которые дороги и сложны в изготовлении и сборке.

Преимущества цифровых вычислительных устройств автор видит в следующем: 1) отсутствие потери точности при вычислениях, независимо от числа операций; 2) гибкость. Одно и то же цифровое вычислительное устройство может решать и навигационные задачи, и задачи управления огнем или бомбометания без сколь-нибудь заметного увеличения веса или сложности. Цифровое вычислительное устройство можно, например, в начале полета использовать для навигационных целей, затем нажатием кнопки переключить его на выполнение задачи перехвата или бомбометания и потом вновь вернуть к навигационным задачам; 3) простота изготовления. Цифровые устройства состоят из большого числа одинаковых деталей, их легче приспособить к производству на автоматических поточных линиях; 4) потенциально большая надежность. За исключением запоминающего устройства и устройства управления, в цифровых вычислительных устройствах нет движущихся частей. Это делает их потенциально более надежными, чем устройства непрерывного действия. Когда неприхотливые и долговечные полупроводниковые триоды заменят электронные лампы, употребляемые сейчас в цифровых устройствах, эта потенциальная надежность будет реализована. В качестве единственного недостатка цифровых вычислительных устройств, который затрудняет пока широкое их применение на самолете, автор указывает на сложность запоминающего и управляющего устройств. В стационарных цифровых вычислительных машинах эти устройства обычно велики и тяжелы. Учитывая, однако, что самолетное вычислительное устройство должно решать лишь несколько специальных задач, можно рассчитывать уменьшить размеры этих блоков. В статье приводятся фотографии одного из цифровых устройств фирмы «Хьюз» и отдельных его съемных блоков. *Д. П.*

4940. «Запоминание» со скоростью 160000 раз в секунду («Remembering» 160000 times a second), Princeton Engr, 1953, **13**, № 3, 29 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Хьюз» (Hughes), в котором приводятся данные запоминающего устройства на магнитном барабане для самолетного цифрового вычислительного устройства той же фирмы. На барабане может быть записано более 2500 кодов по 19 знаков. Плотность записи приблизительно 100 двоичных разрядов на 1 дюйм. Диаметр барабана 102 *мм*, скорость вращения 8000 об/мин, скорость записи и считывания около 160 000 двоичных разрядов в 1 сек. Приведено фото. *Д. П.*

4941. Более чем в 100 раз быстрее человеческого мозга (More than 100 times faster than the human brain), Minnesota Technolog, 1954, **34**, № 4, 38 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Хьюз» (Hughes) о разработанном фирмой устройстве ввода и вывода для самолетного цифрового вычислительного устройства той же фирмы; приведено фото. (Более подробное описание см. в статье MacKnight M. L., Adamson P. A., Convention Record of the I. R. E., 1953 National Convention. Part 7 — Electronic Computres, 2—6). *Д. П.*

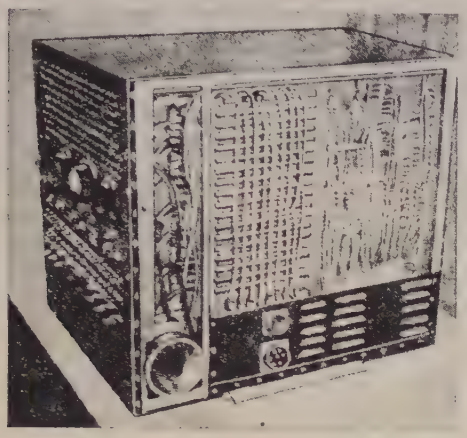
4942. Новые области применения цифровых вычислительных машин (New jobs for digital computers), Aviat. Week, 1954, **60**, № 5, 45, 48 (англ.)

Краткое описание двух новых малогабаритных цифровых вычислительных машин ДЖЕНКОМП-С (Jaincomp-C) и ДЖЕНКОМП-D (Jaincomp-D) фирмы «Джекобс» (Jacobs Instrument Co.) и небольшой универсальной цифровой машины АЛЬВАК (Alwac) фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research, Inc.). Выпуск машин ДЖЕНКАМП показывает, по мнению автора, что конструкторы цифровых машин надеются овладеть задачами в области управления огнем и наведения снарядов, которые раньше решались при помощи устройств непрерывного действия.

ДЖЕНКОМП-С. Машина ДЖЕНКОМП-С (см. фото) построена фирмой «Джекобс» для военных целей. Она оперирует с данными, непрерывно поступающими в нее через 9 внешних каналов, работая в истинном масштабе времени (ср. РЖМат, 1953, 1431) и используя для вычислений константы, хранящиеся в ее запоминающем устройстве. Машина имеет 3 выхода, с которых периодически могут сниматься значения каких-либо 3 переменных. Указывается, что если бы машина была использована в системе управления огнем истребителя, то в качестве 9 вводимых в нее переменных могли бы фигурировать азимут, возвышение и дальность цели, скорость движения истребителя относительно трех осей, воздушная скорость, высота, температура

воздуха. 3 выхода давали бы поправки в двух плоскостях и время упреждения.

Машина измеряет входные величины 10 раз в 1 сек. и в таком же темпе выдает выходные данные. Если на одном из входов переменная резко



К реф. 4942

изменяется, машина анализирует ранее поступившие данные, чтобы определить, является ли это изменение возможным или должно рассматриваться как случайное и быть отброшено. Машина, по словам фирмы, может принимать несколько типов подобных решений.

Чтобы обеспечить возможность работы в истинном масштабе времени ДЖЕНКОМП-С должна иметь высокую скорость; в связи с этим она является машиной полностью параллельного типа. По данным фирмы, скорость сложения двух 24-значных чисел составляет 8 μсек, умножения 600 μсек, деления 680 μсек. Машина имеет три запоминающих устройства: 1) оперативное, из 24 магнитных регистров, в каждом из которых размещается одно 24-значное число со временем выборки около 4 μсек (РЖМат, 1954, 3499); 2) длительное, на перфокартах, для запоминания программы и констант. Каждая программная перфокарта содержит 128 кодов команд по 24 разряда; каждая из трех перфокарт для запоминания констант содержит 70 чисел по 24 разряда. По данным фирмы, время выборки наперед заданного числа с этих карт составляет 1 μсек; 3) приемное, из 9 полумагнитных регистров для запоминания последних значений переменных, приходящих по 9 внешним каналам.

Через каждые 3,2 сек. (32 цикла операций) производится автоматическая проверка, заключающаяся в том, что на входы подаются некоторые вполне определенные величины, которые должны дать заранее известный результат. Если результат получается другой, машина останавливается и дает сигнал. Машина содержит 800 субминиатюрных ламп и занимает объем 56 × 61 × 71 *см* (без источника питания); она может работать от переменного тока 400 или 60 *гц*.

ДЖЕНКОМП-D отличается от машины ДЖЕНКОМП-С тем, что она будет оперировать с 36-значными числами, будет иметь запоминающее устройство на магнитных регистрах на 1024 числа по 36 знаков и внешнее запоминающее устройство с магнитной лентой. Эта машина может использоваться как универсальная цифровая машина. Она будет втрое больше ДЖЕНКОМП-С и будет иметь 1500 ламп.

Указывается, что фирма ищет организацию, которая субсидировала бы постройку ДЖЕНКОМП-D.

АЛЬВАК является двоичной машиной последовательного типа с запоминающим устройством на магнитном барабане емкостью 2048 чисел. Стоимость машины 48 тыс. долларов. Указывается, что во главе фирмы «Лоджистикс Рисёрч», выпускающей эту машину, стоит Хаген (Clen E. Hagen), ранее руководивший исследовательской группой по вычислительным машинам фирмы «Нортроп», где была разработана вычислительная машина МЭДДИДА (РЖМат, 1954, 2380, 2381), а потом отделением вычислительных машин авиационной фирмы «Бендикс» (Bendix Aviation).

Указывается, что фирма «Лоджистикс Рисёрч» работает над магнитным барабаном большой емкости.

Д. Ю. Панов

4943. Сооружение крупной электронной счетной машины. Джонсон (Installation of a large electronic computer. Johnson L. R.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 September, 1953, 77—81 (англ.)

Даются общие соображения о проектировании крупных вычислительных центров (расчет необходимой электрической мощности и занимаемой площади, размещение основного и вспомогательного оборудования, устройства ввода и вывода, охлаждение, структура машины, подготовка кадров и т. д.), основанные на опыте проектирования и эксплуатации находящейся в Пентагоне вычислительной машины УНИВАК (см. РЖМат, 1953, 934, 1442; 1954, 1856) Управления ВВС США.

Л. В. Кутуков

4944. «Дженерал Электрик» арендовала автоматическую счетную машину (General Electric Co. leases automatic computer), Moody's Industrials, 1953, **25**, № 51, 2134 (англ.)

Отдел крупного оборудования (Major appliance division) фирмы «Дженерал Электрик» взял в аренду на 2 года у фирмы «Ремингтон Ранд» универсальную автоматическую счетную машину УНИВАК с правом покупки ее.

4945. Фирма «A. V. Roe» приобретает дополнительные вычислительные машины (A. V. Roe adds computers), Aviat. Week, 1954, **60**, № 4, 75 (англ.)

Авиационная фирма «A. V. Roe Canada Ltd» приобретает цифровую машину КАДАК 102-А (CADAC 102-A) фирмы «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (РЖМат, 1954, 2382) и моделирующее устройство фирмы «Боинг». Обе машины стоят 130 тыс. долларов.

4946. Канадская фирма «АВРО» устанавливает вычислительную машину (AVRO Canada is installing...), Amer. Aviat. Daily, 1953, **89**, № 28, 253 (англ.)

Сообщение об установке новых вычислительных машин на заводе авиационной фирмы «АВРО» в Мальтоне (Malton, Ont.). См. реф. 4945.

4947. 4 миллиона вычислений, выполненных без ошибок (4 million computations completed without error), Mach. Design, 1953, **25**, № 5, 238 (англ.)

Электронная вычислительная машина ЭЛЕКОМ-100 (Elecom-100; см. РЖМат, 1954, 2749) принята представителями артиллерии на Абердинском полигоне (США). В процессе испытаний вычислительная машина проработала 60 час. без сбоев. Работая со скоростью около 1700 действий в 1 мин., вычислительная машина выполнила 4 млн. операций за первые 42 часа работы.

Предполагается использовать вычислительные машины данного типа для следующих целей: 1) испытания конструкций сверхскоростных самолетов без использования аэродинамических труб; 2) изучение усилий в сплавах высокой прочности.

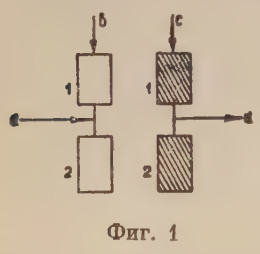
Приведен общий вид вычислительной машины.

В. А. Зимин

4948. Моделирование при помощи теплопередачи. Сейвет (Analog computing by heat transfer. Savet Paul H.), Tele-Tech, 1954, **13**, № 2, 101, 122 (англ.)

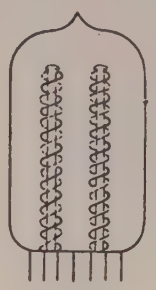
Описывается вычислительное моделирующее устройство, разработанное фирмой «Арма» (Arma Corp.), в котором используется преобразование электрических сигналов в тепло (РЖМат, 1954, 1869). Прибор состоит из преобразователя и мостика Уитстона; входной электрический сигнал преобразуется в тепло, а создаваемое приращение температуры подводится к двум чувствительным к изменению температуры элементам мостика Уитстона; напряжение на выходе преобразователя является функцией величины разбалансировки мостика и пропорционально опорному сигналу, подаваемому на мостик.

Преобразователь, схематически изображенный на фиг. 1, состоит из двух тождественных «нагревательных элементов» H_1 и H_2 и двух «воспринимающих элементов» B_1 и B_2. Элемент H_1 находится в тепловом, но не электрическом контакте с элементом B_1, элемент H_2 — в таком же контакте с элементом B_2. При этом не происходит теплообмена между парами H_1, B_1 и H_2, B_2. Если через a и b обозначить на фиг. 1 электрические сигналы и предположить, что эти сигналы в одной фазе, то очевидно, что напряжение на элементе H_1 будет равно $a - b$, а на элементе H_2 будет равно $a + b$. Нагревание каждого из элементов будет пропорционально квадрату напряжения, а разность величин рассеиваемого ими тепла будет пропорциональна $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$, т. е. произведению входных сигналов. В общем случае, когда сигналы сдвинуты по фазе на φ, эта величина будет пропорциональна $4ab\cos\varphi$. Зависимость сигнала d на выходе системы чувствительных элементов будет иметь вид $d = cf(ab)$, причем функция $f(x)$ в практически интересных случаях будет такова: $f(x) = kx/(1 + p\tau)$. Здесь k — коэффициент передачи, τ — постоянная времени.



Фиг. 1

Конструктивно преобразователь выполнен в виде двух стержней из пайрекса (фиг. 2), на которые намотаны нагревательный элемент в виде двойной нити накала из нихрома № 40 в тефлоновой изоляции и один или несколько воспринимающих элементов из никелевой проволоки № 40 в той же изоляции. Стержни заключены в миниатюрную стеклянную или металлическую колбу, вакуума в которой не требуется.


Фиг. 2

Рабочий диапазон температур лежит в пределах от 60 до 250°, а диапазон частот от 60 *гц* до 1 *кгц*. Указывается, что легко может быть получена точность прибора до 0,5%, стоимость же его составляет от $^1/_2$ до $^1/_5$ стоимости электронных ламп обычных типов.

Рассматривается использование преобразователя для создания множительного и делительного устройств.

Множительное устройство весит несколько унций (1 унция = 28,3 *г*) и занимает объем 13—15 *см*³. Достигнутая точность составляет 0,5—1%.

Рассматривается также применение теплового преобразователя в интеграторе и дифференциаторе переменного тока, обладающего тем преимуществом перед другими типами интеграторов, что техника интегрирования и дифференцирования сигналов постоянного тока та же, что и для сигналов переменного тока, так как функция передачи $T(p) = k/(1 + p\tau)$ предусматривает эффективное, а не мгновенное значение сигнала на входе.

Сообщается, что тепловые преобразователи были применены не только в счетчиках, но и в сервомеханизмах и таких приборах как преобразователи частоты, фильтры, осуществляющие сдвиг фазы на 90°, и фильтры подавления гармоник, модуляторы и демодуляторы, опережающие цепи, схемы фазового и квадратичного разделения сигналов, точные фазовращатели и т. д.

Д. Т.

4949. Метод умножения для электрических моделей. Айл (An electrical method of analogue multiplication. Isle D. E. S.), Instrum. Practice, 1953, **7**, № 8, 594—595 (англ.)

Описан метод получения напряжения, пропорционального произведению двух других напряжений, при помощи быстродействующего поляризованного реле.

Реле питается переменным током, благодаря чему якорь его вибрирует с той же частотой. Одно из напряжений-сомножителей создает ток подмагничивания в обмотке реле. Благодаря протеканию тока подмагничивания якорь реле задерживается в одном из крайних положений дольше, чем в другом. К двум контактам реле подводится второе напряжение-сомножитель, но к одному контакту со знаком (+), а к другому — со знаком (—). При таком включении среднее значение тока, протекающего от подвижного контакта реле за период переключения, будет приблизительно прямо пропорционально произведению двух напряжений-сомножителей.

Для улучшения линейности зависимости произведения от напряжения подмагничивания в схему

введены два германиевых диода. Напряжение на выходе пропорционально произведению двух напряжений входа, которые могут быть любого знака. *Н. В. Корольков*

4950. «Тимоти» — электронная черепаха-автомат. Кубанов (Timothy — a robot electronic turtle. Kubanoff Jack H.), Radio and Telev. News, 1953, 49, № 4, 35—38, 150—153 (англ.)

Подробное описание управляемой световыми командами автоматической игрушки, оформленной в виде черепахи, которая выполняет две функции: она «играет» (идет на свет) и «ищет пищу» (идет к «гнезду», где заряжается установленный в ней конденсатор). Приведены фотографии схемы с указанием параметров. *Н. Я. Матюхин*

4951. Список организаций, работающих в области вычислительных машин и автоматики. Сводный список по состоянию на 10 октября 1953 г. (Roster of organizations in the field of computers and automation. Cumulative, information as of Oct. 10, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 8, 4—16 (англ.)

В список включены 177 организаций (из них в США — 155; Англии — 10; Франции — 6; Италии — 1; Канаде — 2; Австралии — 2; Швеции — 2; Голландии — 1; Германии — 1). Указан характер деятельности организаций, область интересов, число рабочих, год основания.

4952. Кто чем занят в области счетных машин и автоматики. Часть 3.— Все виды занятий, кроме производства и программирования, 1-й список, сводный по состоянию на 3 сентября 1953 г., включающий фамилии с начальными буквами от S до Z (Who's who in computers and automation: Section 3 — Not business, not programming —S to Z. 1 ed., cumulative, information as of Sept. 3, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 7, 21—27 (англ.)

Сводный список научных работников, инженеров, работников промышленности и торговых предприятий, интересующихся различными вопросами в области счетных машин и автоматики. Указывается область интересов. В список включено 154 человека, живущих в США, 4 человека — в Канаде, 2 человека — в Англии и 1 человек — во Франции.

4953. Сообщение о стоимости вычислительных работ (Cost of computation services announced), Tele-Tech, 1954, 13, № 2, 14 (англ.)

Отделение электронных инструментов фирмы «Берроус» в Филадельфии объявило о приеме вычислительных работ. Цены: машинное время 50 долларов в час, программирование 7,5 долларов в час, операции с лентами 5 долларов в час.

4954. Электроника в Эрлс Корт (Electronics at Earls Court), Brit. Engng, 1953. 36, № 97, 141 (англ.)

Сообщение о 20-й Британской радиотехнической выставке (Лондон). В числе экспонатов электронная сортировка фирмы ИБМ (англ. филиал), обрабатывающая 650 карт в минуту, и малая электронная вычислительная машина Национальной физической лаборатории. *Н. Я. Матюхин*

4955. Сверхминиатюрная линия задержки (Sub miniature delay line), Proc. Inst. Radio Engrs' 1953, 41, № 5, 122A (англ.)

Сообщение фирмы «Джекобс» (Jacobs Instrument Co.) о разработке малогабаритной линии задержки с сосредоточенными постоянными.

Время задержки линии 2,5 *мксек* (или 5 *мксек* при использовании отражения), затухание 2 *дб*; волновое сопротивление 2800 *ом*; размер 50 × 17,5 × × 12,7 *мм*; вес 22,5 *г*.

Линия задержки запрессована в пластмассу и может быть легко установлена на панели любого типа. *Н. Я. Матюхин*

4956. Миниатюрная линия задержки (Potted, sub-miniature delay line), Prod. Engng, 1953, 24, № 8, 230 (англ.)

См. реф. 4955.

4957. Запоминающее устройство (Memory unit), Radio and Telev. News, Radio-Electr. Engng Sec., 1953, 50, № 2, 20 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3890.

4958. Блок запоминающего устройства вычислительной машины (Computer memory package), Instruments, 1953, 26, № 8, 1137 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3890. Приведено фото.

4959. Новый тип миниатюрной лампы для вычислительных машин (New miniature for computer service), Radiotronics, 1953, 18, № 6, 90 (англ.)

Миниатюрный двойной триод фирмы RCA типа 6211 (Radiotron-6211) сконструирован специально для триггерных схем электронных вычислительных машин. Лампа рассчитана на работу в условиях, когда управляющая сетка может длительное время иметь отрицательный потенциал относительно катода. Эмиссионные свойства лампы при этом сохраняются. Величина напряжения на управляющей сетке, соответствующая отсечке анодного тока, контролируется при изготовлении ламп.

Лампа имеет цоколь с девятью штырьками. Катоды выведены раздельно. Имеется отвод от средней точки нити накала, что позволяет применять для накала напряжение либо 6,3 *в*, либо 12,6 *в*. Нить накала изготовлена из чистого вольфрама, что обеспечивает достаточный срок службы в условиях многократных выключений питания.

Методика проверки качества ламп при изготовлении соответствует рабочим условиям применения их в вычислительных машинах. Лампы дополнительно испытываются на электрическую прочность и на состояние вакуума. *В. А. Зимин*

4960. Миниатюрные разъемы (Precision miniature connectors), Electr. Manufact., 1953, 52, № 1, 176, 178 (англ.)

Сообщение фирмы «Корн Электроникс» (Corn Electronics Div., Corn Electric Co.) о выпуске миниатюрных разъемов серии GM на 14, 18, 20, 21, 34, 41 и 50 контактов. Разъемы предназначаются для использования в вычислительных машинах, в технике телеизмерений и в других сложных электронных устройствах.

Корпуса разъемов прессуются из термостойкой пластмассы с высокими изоляционными свойствами. Контакты имеют плавающую посадку. Для обеспе-

чения надежности электрического соединения контакты посеребрены и покрыты золотом.

В. А. Зимин

4961. Малогабаритные танталовые конденсаторы (Tiny tantalum capacitors), Steel, 1953, 133, № 14, 102, 105 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о новых сверхминиатюрных танталовых конденсаторах, которые могут быть использованы в схемах с германиевыми триодами, применяемых в военном оборудовании и в слуховых аппаратах. Конденсаторы выполняются емкостью от 4 до 0,7 *мкф* при напряжениях от 2 до 16 *в* соответственно. Рабочая температура конденсаторов от—20 до +50°; при—55°, по данным испытаний, конденсаторы сохраняют 65% своей емкости при комнатной температуре.

Приведена фотография, из которой видно, что размер конденсатора не превышает размера спичечной головки.

4962. Сестра полупроводникового триода (Transistor's sister), New Zealand Electr. J., 1953, 26, № 11, 872 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о предполагаемом выпуске новых миниатюрных конденсаторов. Конденсаторы имеют размер в четыре раза меньший, чем самые маленькие из ранее выпускавшихся. Они предназначаются для работы в схемах, содержащих полупроводниковые триоды.

4963. Разработка деталей и схем вычислительных машин. Эллиотт (Development of computer components and systems. Elliott W. S.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 September, 1953, 68—73 (англ.)

Сообщение о разработке стандартных элементов и схем вычислительных машин в исследовательской лаборатории фирмы «Эллиотт» (Elliott Brothers Ltd, London).

В начале работы (1948 г.) все элементы вычислительной машины последовательного действия были сведены к шести следующим.

1. Сумматор — схемы совпадения и несовпадения, обеспечивающие задержку не свыше 0,07 *мксек*.

2. Блок задержки — две одинаковые схемы для задержки переноса в сумматоре, или для сдвига при умножении, или в качестве логического элемента в дешифраторе команд.

3. Коммутатор — две упрощенные схемы задержки для цепей переключения импульсов.

4. Триггерная ячейка — две триггерные схемы для статических регистров или для деления частоты.

5. Блок катодных повторителей — шесть независимых схем на пентодах.

6. Блок диодных вентилей — пять схем совпадения на германиевых диодах.

Питание +100 *в* и —150 *в*, номинальная амплитуда импульсов 6 *в*.

Из этих стандартных элементов с применением некоторого количества нестандартных (семь типов, в сумме около 25% от общего количества) была собрана вычислительная машина последовательного действия. Частота повторения импульсов 330 *кгц*, запоминающее устройство на трубках Вилльямса. Множительное устройство последовательно-параллельное с тремя каналами. Эти мероприятия позволили получить скорость счета такую же, как и у машины параллельного действия. Код содержит 20 разрядов, из них числовая часть составляет 14 разрядов.

Машина состоит из: 1) множительного устройства, производящего умножение с округлением; 2) регистра в виде запоминающего устройства на линиях задержки, приспособленного для сложения, вычитания, сдвига и сравнения; 3) регистра двойного кода (с запоминанием 40 разрядов); 4) запоминающего устройства на трубках Вилльямса с емкостью 64 кода на двух трубках; 5) устройств ввода и вывода на фотолентах (емкость ленты тринадцать 14-разрядных чисел на 1 дюйм с метками между ними).

Вначале машина содержала около 280 блоков. Затем в 1950 г. машина была переделана из-за плохого охлаждения и ненадежности разъемов включения блоков. Количество блоков было увеличено до 350 штук. До весны 1951 г. время эксплуатации, включая наладку, составило около 1500 час. Полезное время использования машины в настоящее время составляет около 50%. Использование машины лимитируется в основном дефектами устройств ввода и вывода.

На основании изучения опыта работы первоначальной конструкции были сделаны следующие выводы.

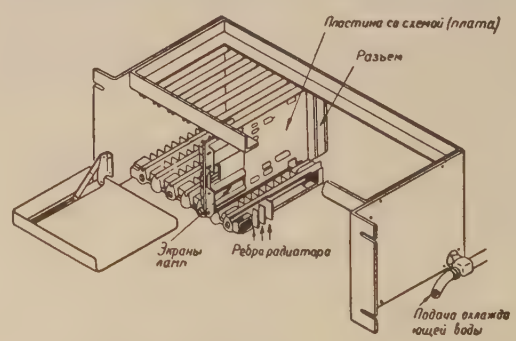
1. Амплитуду импульсов необходимо повысить до 10 *в* вместо 6 *в*.

2. Все логические операции возможно осуществлять при помощи схем объединения и совпадения импульсов, собранных на германиевых диодах.

3. Ламповые усилители необходимы только для целей передачи импульсов из одних логических цепей в другие, для целей восстановления импульсов во времени или по амплитуде, для целей генерирования импульсов, а также для схем запоминающего устройства.

4. Триггерные схемы для запоминания могут быть заменены ламповым генератором с линией задержки. Триггерные схемы необходимы только для целей управления переключениями.

На основании этих выводов число разновидностей стандартных элементов было уменьшено до трех. Были разработаны две схемы, содержащие по



Блок с водяным охлаждением для пластин со схемами (плат)

К реф. 4963

4 пентода, и одна схема на двух пентодах. Схемы содержат необходимое количество германиевых диодов. Блоки оформляются так, чтобы было обеспе-

чено хорошее их охлаждение; предусматривается водяное охлаждение стоек (см. фото).

Для увеличения емкости запоминающего устройства разработан магнитный диск. Диск позволяет получать окружную скорость порядка 3 μсек на разряд. Для быстродействующих запоминающих устройств, а также для регистров на один код разрабатываются схемы на магнитострикционных никелевых линиях задержки. Время задержки таких линий ограничивается 1,5 мсек.

Новые типы стандартных элементов будут применены в двух вычислительных машинах. Первая из них — большая вычислительная машина специального назначения с запоминающими устройствами на трубках Вилльямса и на магнитном диске. Ввод данных производится при помощи перфоленты, вывод — на телетайп. Команды хранятся на магнитном диске. В машине используется около 360 блоков. Вторая из них — малая вычислительная машина общего назначения с магнитострикционным запоминающим устройством. Емкость запоминающего устройства 1024 числа. Число состоит из 32 разрядов. Время ожидания примерно 12 μсек. Сообщается также о работах по печатным схемам.

В. А. Зимин

4964. Конструкция унифицированных элементов для электронных устройств (Unitized design for electronic subassemblies), Electr. Manufact., 1953, **51**, № 1, 110, 112 (англ.)

Краткое описание сменных унифицированных элементов, разработанных фирмой «Форд Инструмент» (Ford Instrument Div. of the Sperry Corp.) для вычислительной машины авиации Военно-морского флота США. Элементы содержат отдельные узлы электронных схем. Схема собирается из элементов на стандартной панели, содержащей разъемы и направляющие для крепления элементов. Панель помещается в герметизированный кожух. Конструкция предназначена для применения в вычислительных машинах, самолетных устройствах и пр. Приведены фото.

Н. Я. Матюхин

4965. Сменные блоки (Plug-in packages), Tele-Tech, 1953, **12**, № 4, 97 (англ.)

Сообщение фирмы «Олден Продуктс» (Alden Products Co.) о выпуске стандартных сменных блоков. Блоки с разными схемами различаются при помощи цветного кода. Для монтажа блоков в устройстве выпускаются специальные панели и соединительные кабели. Проверка блоков производится при помощи специального контрольного пульта, определяющего неисправный элемент блока.

Н. Я. Матюхин

4966. Новый лентопротяжный механизм для вычислительных машин (New computer tape mechanism), Tele-Tech, 1953, **12**, № 6, 151 (англ.)

Сообщение фирмы «Райтеон» (Raytheon Manufacturing Co.) о выпуске устройства для записи на магнитную ленту, предназначенного для вычислительных машин.

Управление движением ленты либо автоматическое, либо ручное. Время набора скорости или полной остановки менее 5 мсек. Ширина ленты 12,7 *мм*, запись и считывание ведется по шести параллельным дорожкам. Кроме того, имеется фотоэлектрическое устройство для считывания отметок на обратной стороне ленты. Максимальная длина ленты 300 *м*. Устройство снабжено специальной следящей системой для поддержания постоянного натяжения ленты.

Н. Я. Матюхин

4967. Записывающее устройство на ленте для вычислительной машины (Computer-tape mechanism), Instruments, 1953, **26**, № 7, 982 (англ.)

См. реф. 4966. Устройство испытывалось на машине РАЙДАК (RAYDAC).

4968. Механизм для вычислительных машин (Computer mechanism), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 2, 30 (англ.)

См. реф. 4966.

4969. Самописец для нестационарных процессов (Transient recorder), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 8, 711 (англ.)

Сообщение фирмы «Магне-Палс» (Magne-Pulse Corp.) о выпуске прибора, записывающего на магнитную ленту случайный нестационарный процесс. Полоса пропускания прибора от 0 до 30 *кгц*, что позволяет записывать прямоугольные импульсы длительностью около 20 сек.

Хорошая характеристика прибора в области низких частот обеспечена за счет применения время-импульсной модуляции. Прибор применяется для исследований в области атомной энергии, радиотехники, медицины.

Н. Я. Матюхин

4970. Эпоха полупроводникового триода. Белло (The year of the transistor. Bello Francis). Fortune, 1953, **47**, № 3, 128—132, 164, 166, 168 (англ.)

Твердое тело и в особенности кристаллическое вещество начинает завоевывать видное место в электронике. Вакуумная лампа теряет свое «монопольное» положение в связи с появлением полупроводникового триода.

Выпуск германиевых триодов в США (50 тыс. штук в месяц в начале 1953 г.) составляет еще незначительную долю выпуска электронных ламп (35 млн. штук в месяц), а цена германиевого триода (5—8 долларов) намного превышает цену вакуумной лампы (1 доллар— 1 доллар 60 центов). Несмотря на то, что крупные фирмы не намереваются выпускать германиевые триоды, прежде чем убедятся в их эксплуатационной надежности, большие капиталовложения в разработку и массовое производство полупроводниковых электронных приборов, в частности со стороны правительственных военных учреждений, дают основание ожидать значительное изменение приведенных цифровых соотношений уже в ближайшее время. Об этом свидетельствуют, например, следующие данные. В лабораториях компании «Белл» и ее производственном филиале — фирме «Уэстерн Электрик» вопросами теории, усовершенствования и технологии германиевых электронных приборов занято 200 научных работников и инженеров. Корпус войск связи по указанию Министерства обороны вкладывает 13 млн. долларов в строительство завода фирмы «Уэстерн Электрик» в Лорелдейле (Пенсильвания), обладающего производственной мощностью в 1 млн. германиевых триодов в месяц, и других четырех опытных производств фирм GE, «Райтеон», RCA и «Сильвания». Фирма «Германиум Продуктс», не финансируемая

правительством, обещает выпускать 250 тыс. германиевых триодов. 25 американских фирм и 10 иностранных фирм (главным образом из стран Атлантического блока) получили лицензии компании «Белл» на изготовление германиевых триодов, а 300 фирм получили лицензии фирмы RCA по соглашению между лабораториями «Белл» и фирмой RCA.

В связи с появлением полупроводниковых триодов усилились работы над твердым телом и кристаллами. Так, в фирме RCA из 300 научных работников 80 занимаются кристаллами, а в лаборатории компании «Белл» из 2300 научных работников около 300 работает над аналогичной тематикой. Среди других явлений в твердом теле внимание исследователей привлекают такие явления, как ферромагнетизм и ферроэлектричество, которые могут быть широко применены при разработке запоминающих элементов вычислительных машин (запоминающие устройства с использованием магнитных сердечников, запоминающие устройства с использованием кристаллов титаната бария).

Полупроводниковый триод не может заменить электронную лампу в уже действующей схеме; поэтому наиболее целесообразно внедрять полупроводниковые триоды при разработке новых устройств, в которых они будут иметь значительные преимущества перед лампами или реле. Германиевые триоды позволяют создать такие новые устройства, которые до этого вообще не могли быть созданы вследствие значительного габарита и потребления ламп. Это, в частности, относится к военному оборудованию.

Уже сейчас начинают успешно применять германиевые триоды в слуховых аппаратах, войсковых устройствах связи, в счетно-решающих устройствах, в радиовещательной аппаратуре, в телефонии, в авиационной электронике.

На приведенных в статье фотографиях показаны построенный на германиевых фоточувствительных элементах искатель свободных междугородных линий, выполненные на германиевых триодах телевизионный приемник и слуховой аппарат, а также другие приборы, использующие электронику твердого тела.

Статья содержит также популярное описание процессов в германиевом триоде, фотографии и имена некоторых лиц, занимающихся в США теорией, изготовлением и усовершенствованием электронных полупроводниковых приборов. Отсутствуют ссылки на имена и открытия русских ученых в этой области. *Н. И. Бродович*

4971. **Фирма «Миннеаполис — Хонейвелл» объявляет о разработке силового полупроводникового триода** (Minneapolis — Honeywell announces development of power-type transistor), Telecommuns Repts, 1953, 20, № 7, 22 (англ.)

Предварительное сообщение о разработке полупроводникового триода с мощностью на выходе 20 *вт* вместо 0,2 *вт*, получаемых в других типах.

4972. **Запаянные полупроводниковые триоды** (Sealed transistors), Radio and Telev. News, 1953, 50, № 5, 198 (англ.)

Фирма «Дженерал Электрик» объявляет о предстоящем производстве новых полупроводниковых триодов с поверхностным контактом, которые будут герметически запаяны в сварную конструкцию, из которой удален воздух. Сварная конструкция рассчитана на мощность почти до 1 *вт* при работе двух элементов в режиме двухтактного усилителя класса В. Как указывается в сообщении, триоды могут работать при температуре до 100°.

4973. **Полупроводниковые триоды с поверхностным контактом** (Junction transistors), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 10, 126A (англ.)

См. реф. 4972.

Массовое производство новых триодов предполагается осуществить на полностью автоматизированном заводе.

Триоды предназначаются для военных применений и для автоматики.

Приведена фотография триода. *Н. Б.*

4974. **Германиевые диоды фирмы «Дженерал Электрик»** (G. E. C. germanium diodes), Wireless and Electr. Trader, 1953, 91, № 1196, 258—259 (англ.)

Краткое сообщение фирмы «Дженерал Электрик» в Лондоне о точечно-контактных диодах со стеклянным капсулем. Указаны новые исполнения серии GEXOO, их применения, цена, а также некоторые типы американских диодов, соответствующие выпускаемым в Англии.

4975. **Повреждение полупроводникового триода** (Transistor failure), Radio and Telev. J., 1953, 70, № 5, 8 (англ.)

Краткая заметка о повреждениях полупроводниковых триодов в слуховых аппаратах после нескольких недель или месяцев работы. Указывается, что причиной повреждений является влага, проникающая в триоды при эксплуатации слуховых аппаратов; для предотвращения подобных повреждений предполагается выпустить герметически запаянные триоды.

См. реф. 4972.

4976. **Полупроводниковый триод, помещенный в вакуум** (Evacuated transistor), Radio and Telev. News, 1953, 50, № 3, 80 (англ.)

Сообщение фирмы CBS-Hytron о производстве полупроводниковых триодов с поверхностным контактом, помещенных в вакуум. Указывается, что такая конструкция устраняет возможную утечку и по отношению к предыдущему герметически запаянному исполнению является дальнейшим шагом в усовершенствовании полупроводниковых триодов. *Н. Б.*

4977. **Многоэлементные полупроводниковые электронные приборы** (Multielement transistors), Instruments, 1953, 26, № 9, 1351 (англ.)

Фирма «Сильвания» (Sylvania Electric Products Co.) объявляет о выпуске полупроводниковых тетродов и о предстоящем выпуске точечно-контактных пентодов. Приведен эскиз многоэлектродного прибора.

4978. **Новые лампы** (New tubes), Radio-Electronics, 1953, 24, № 10, 127 (англ.)

Сообщение фирмы «Сильвания» (Sylvania) о разработке германиевых точечно-контактных тетродов типа 3N21. Приводятся следующие данные тетро-

дов: максимальное напряжение коллектора — 60 *в*, максимальное рассеяние коллектора 100 *мвт*, максимальное напряжение эмиттеров —50 *в*, максимальная выходная мощность каждого из эмиттеров 30 *мвт*, максимальная температура окружающей среды 50°.

Тетроды могут быть применены как в схемах малых сигналов, так и в коммутационных схемах.

4979. **Новые полупроводниковые электронные приборы** (New transistors), Steel, 1953, 133, № 7, 109 (англ.)

См. реф. 4978.

4980. **Семейство полупроводниковых электронных приборов растет** (Transistors family grows), Sci. News Letter, 1953, 64, № 5, 69 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3141—3143.

4981. **Полупроводниковый триод, работающий при частоте 400 *Мгц*** (400-Mc. Transistors), Instruments, 1953, 26, № 8, 1230 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы RCA об экспериментальном точечно-контактном триоде, работающем в режиме генератора при частоте 400 *Мгц*. Отмечается, что усовершенствованные точечно-контактные триоды типа *p* обладают тем преимуществом по отношению к триодам типа *n*, что они могут быть использованы как генераторы при значительно более высокой частоте. *Н. Б.*

4982. **Германиевый триод или 25 миль в кусочке германия.** Роз (The transistor or 25 miles on a hunk of germanium. Rose George M.), QST, 1953, 37, № 3, 13—15, 138 (англ.)

Сообщается об опыте передачи на волне 2 *м* радиосигналов от передатчика, представляющего собой генератор на германиевом триоде. Сигналы принимались на расстоянии до 25 миль. Приведена схема генератора на германиевом триоде, работающего при частоте 146 *Мгц*.

Остальная часть статьи содержит популярное описание германиевых триодов. *Н. Б.*

4983. **Германиевые триоды** (Germanium transistors), Electronics, 1953, 26, № 7, 331 (англ.)

Сообщение фирмы RCA о германиевых триодах типов 2N32, 2N33, 2N34 и 2N35.

См. РЖМат, 1954, 2428.

4984. **Современное состояние развития электронных полупроводниковых приборов.** Энгберт (Wo steht die Transistorenentwicklung heute? Engbert Wilhelm), Elektron, 1953, № 8, 237—238 (нем.)

Статья содержит краткое описание и сравнение с электронными лампами современных полупроводниковых электронных приборов. Отмечается значительное усиление разработок в США за последние годы в этой области; соответствующие вложения в США, по мнению автора, по крайней мере на два порядка выше, чем в Западной Германии. *Н. Б.*

4985. **Элементы промышленной электроники. Полупроводники.** Болан (Eléments d'électronique industrielle. Les semi-conducteurs. Bolant Roger), Mach.-outil franç., 1953, 18, № 80, 171, 173, 175, 181 (франц.)

Рассматриваются преимущества и недостатки полупроводниковых триодов, принцип действия и статические характеристики полупроводникового триода с поверхностным контактом и элементарная схема усилителя с заземленным основным электродом.

4986. **Полупроводниковые электронные приборы** (Transistoren), Tekn. og fys., 1953, 8, № 6, 206—208 (норв.)

Краткая статья о полупроводниковых электронных приборах. Приведены некоторые элементарные схемы, в которых используются полупроводниковые триоды и тетроды. Даны выражения для основных параметров, характеризующих усилительные свойства трех основных типов схем с полупроводниковыми триодами.

4987. **Полупроводниковые триоды с точечным и с поверхностным контактом.** Доремус (Transistores de punto de contacto y de union. Doremus John A.), Rev. telecomun., 1953, 9, № 31, 36—40 (исп.)

Краткое популярное описание полупроводниковых электронных приборов различных типов. Приведены сравнительные данные параметров современных электронных ламп и германиевых триодов, а также эквивалентные схемы триодов.

4988. **Трансформаторы фирмы «Станкор», предназначенные для полупроводниковых триодов** (Stancor transistor transformers), Tele-Tech, 1953, 12, № 4, 152 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Станкор» о выпуске трансформаторов типа ИМ-110, ИМ-111 и ИМ-112, предназначенных для схем с полупроводниковыми триодами. Приведены некоторые данные трансформаторов и фотография.

4989. **Трансформаторы для схем с кристаллическими триодами** (Transistor circuit transformers), Tele-Tech, 1953, 12, № 9, 92 (англ.)

Сообщение фирмы «Грамер Трансформер» (Gramer Transformer Corp.) о выпуске малогабаритных переходных трансформаторов для согласования входного и выходного сопротивлений в схемах с кристаллическими триодами. Размеры самого большого трансформатора 8×10×10 *мм*, вес 2 *г*.

Н. Я. Матюхин

4990. **Чувствительный зеркальный инструмент для интегрирования по времени малых электрических импульсов напряжения.** Блумберг (Ett känsligt ljusvisarinstrument avsett för integrering av svaga elektriska spänningsimpulser med avseende på tiden. Blomberg Hans), Valtion Tekn. Tutkimuslaitos, 1953, № 25, 188 (швед.; резюме англ.)

4991. **Специальная счетная линейка для вычисления количества вытекающего газа.** Херлер, Тауц (Sonderrechenschieber zur Berechnung der Ausflußmengen von Gasen. Herler, Tautz), Energietechnik, 1953, 3, № 10, 445—448 (нем.)

Описание, правила пользования и примеры применения счетной линейки, предназначенной для вы-

числения скорости истечения газа через отверстие и количества вытекающего газа.

Приведены значения различных корректирующих коэффициентов, позволяющих применять линейку для газа любой плотности и температуры. Имеется 8 схематических изображений линейки при разных положениях движка. *Е. К. Нечаев*

4992. Новая счетная машина Сандстранд модель *E* (A new accounting machine the Sundstrand model *E*), Mod.Manufact.,1953,4, № 9, 30 (англ.)

4993. Машины для решения сложных математических задач. Квапил (Stroje pro řešení složitých matematických problémů. Kvapil V.), Mat.-přírodověd. rozhl., 1953, **32**, № 4, 108—109 (чеш.)

4994. Достижения автоматики. Море (Réalisations en machinisme automatique. Maurer P.), Électricien, 1953, **81**, № 1921, 167—171 (франц.)

Краткий популярный очерк истории развития автоматики. Кратко говорится об электронных вычислительных машинах. *Р. Д. Бачелис*

4995. Электронный мозг и атомная энергия (Electronic brains and atomic energy), Erda, 1953, **25**, № 4, 43 (англ.)

Заметка общего характера. Отмечается, что термин «электронный мозг» в применении к электронным вычислительным машинам неправилен, так как машины не могут выполнять все функции мозга. *Н. М.*

4996. Могут ли машины думать? Уилкс (Can machines think? Wilkes M. V.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953,**41**,№ 10, 1230—1234 (англ.)

Содержание статьи сходно с прореферированной в РЖМат, 1953, 937. *М. С.*

4997 П. Цифровая вычислительная машина (Digital computing machine) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 152541, кл. 05.5, 13.08.53

Электронная вычислительная машина, имеющая два статических регистра для хранения частей последовательно принимаемой команды, отделенные друг от друга линией задержки. *Н. Я. Матюхин*

4998 П. Электронная цифровая счетная машина (Electronic digital computer) [The Minister of Supply]. Австрал. пат. 150865, кл. 05.5, 30.04.53

4999 П. Запоминающее устройство (Information storage means) [The Minister of Supply]. Австрал. пат. 151156, кл. 05.5, 14.05.53

Запоминающее устройство на электронно-лучевой трубке, в котором используется принцип накопления заряда на диэлектрическом экране под действием электронного луча, снабженное схемой для выбора нужной строки растра. *Н. Я. Матюхин*

5000 П. Магнитное запоминающее устройство (Magnetic storage systems) [The Minister of Supply]. Австрал. пат. 150868, кл. 05.5; 01.7, 30.04.53

Устройство для записи на ферромагнитный слой, в котором последовательность импульсов одной полярности («1») записывается путем намагничения слоя в одном направлении, другой полярности («0») — намагничением его в другом направлении, так что переход от «1» к «0» и наоборот отмечается сменой полярности намагничения. *Н. Я. Матюхин*

5001 П. Шасси для схем со сверхминиатюрными электронными лампами. Скал, Линдсет (Subminiature electron tube circuit structure. Scal Robert K.-F., Lindseth Clinton O.). Пат. США 2641635, кл. 175—298, 9.06.53

5002 П. Электронная вычислительная машина (Electronic computer) [The British Tabulating Machine Co., Ltd.]. Австрал. пат. 150837, кл. 05.5, 30.04.53

Электронный счетчик для отсчета заранее заданного числа импульсов, снабженный устройством для автоматического возврата в исходное состояние после каждого отсчета. *Н. Я. Матюхин*

5003 П. Вычислительная машина. Бройдо (Calculating machine. Broido Daniel). Пат. США 2644638, кл. 235—61, 07.07.53

Краткое описание вычислительной машины с использованием функциональных дисков (см. РЖМат, 1954, 3523; РЖАстр, 1954,3261, 4054). *В. М. Брадис*

5004 П. Бухгалтерская счетная машина. Батлер (Accounting machine. Butler Thomas M.) [Burroughs Adding Machine Co., Детройт, Мичиган, США]. Пат. США 2644637, кл. 235—60, 49, 7.07.53

5005 П. Счетная линейка. Тойен (Slide rule. Tonie Paul J.). Пат. США 2650762, кл. 235—79.5, 1.09.53

Прибор представляет собой круглую цилиндрическую коробку, внутри которой вращаются (от электромотора, независимо друг от друга) несколько цилиндров того же диаметра, на боковых поверхностях которых нанесены функциональные шкалы, видимые через окошко, вырезанное в коробке. *В. М. Брадис*

5006 П. Табличный счетчик. Паккард (Tabular calculator. Packard Henry S.) [The Standard Oil Co., Огайо, США]. Пат. США 2641406, кл. 235—61, 9.06.53

Вычислительное устройство, состоящее из пластинки с нанесенными на нее двумя числовыми таблицами, вдоль и поперек которой может скользить вторая пластинка, несущая на себе третью таблицу. Указания на операции, выполняемые при помощи этого устройства, не содержится. *В. М. Брадис*

5007 П. Вычислительное устройство. Понд (Computing device. Pond Cecil E.) [Ecco, Inc., South Bend, Индиана, США]. Пат. США 2637498, кл. 235—83, 5.05.53

Вычислительный прибор типа счетного диска особой конструкции. *В. М. Брадис*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

5008. Автоматический указатель курса фирмы «Вилькокс». Мауден (The Wilcox «CAT». Mouden L. Homer), Skyways, 1954, **13**, № 1, 14—16, 44 (англ.)

Описывается автоматический указатель курса «КАТ» (CAT — Computing Automatic Tracker) фирмы «Вилькокс Электрик» (Wilcox Electric Co.). Индикатор указателя работает от счетной схемы, к которой подключен выход датчика магнитного компаса и выход самолетного приемника, принимающего сигналы наземного маяка.

Стрелка индикатора управляется разностью сигналов, возникающих за счет отклонения самолета от избранного курса и пеленга.

Приводится описание преимуществ нового способа вождения самолетов перед ранее существовавшими; указаны также результаты эксплуатации.

Технические подробности устройства «КАТ» в статье отсутствуют. *Р. Л. Драбкин*

5009. Аппарат для записи на ленту, построенный для применения в авиации (Tape recorder built for airborne use), Electronics, 1953, **26**, № 8, 300 (англ.)

Сообщение фирмы «Норт Американ Авиэйшн» (North American Aviation Inc.) о выпуске аппарата НАДАР (NADAR) для записи на магнитную ленту показаний приборов. Размеры этого аппарата соответствуют размерам портативной пишущей машинки. НАДАР содержит 360 *м* магнитной ленты, которая находится в огнестойкой и прочной коробке. На ленте можно вести непрерывную запись в течение 10 час., а также стирать ранее записанные данные. Фирма гарантирует нормальную работу вращающихся частей в течение 50 час., после чего необходима проверка.

На ленте можно записывать данные о связи с землей, давлении, высоте, текущем времени, вертикальном ускорении, воздушной скорости и направлении полета.

НАДАР предназначался для установки на управляемых снарядах. Вес устройства 7,2 *кг*.

Я. А. Хетагуров

5010. Телевизионное вычислительное устройство считает кровяные шарики (TV computer counts blood cells), Tele-tech, 1954, **13**, № 2, 14 (англ.)

Краткое сообщение о специальном устройстве «Сангвинометр» (Sanguinometer) для подсчета числа микроскопических частиц, попадающих в поле зрения микроскопа, использующем телевизионную камеру и вычислительную схему.

5011. Нарушители не могут перехитрить вычислительную машину. Мерта (Violators can't outsmart an electronic brain. Murtagh John M.), Amer. City, 1953, 68, № 2, 104—105 (англ.)

Краткое сообщение об использовании перфокарт для регистрации данных по нарушению правил уличного движения в американских городах.

В. С. Бородин

5012 П. Регулировка уровня сигнала для системы с импульсно-кодовой модуляцией. Эгрен (Volume control for pulse code modulation. Aigrain Pierre Raoul) [International Standard Elecrtic Corp., Нью Йорк, США]. Пат. США 2643293, кл. 178—43.5, 23.06.53

Устройство для сжатия динамического диапазона модулируемого сигнала с целью уменьшения искажений за счет перехода к дискретным значениям при импульсно-кодовой модуляции.

О. К. Щербаков

См. также: 4711, 4825 К, 4922

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Агнью 4831
Айзерман М. А. 4741
Айл 4949
Алексевич 4842
Антонеску 4893
Аотани 4766

Б

Багчи 4835
Банахевич 4745
Барбэлат 4837
Баркли 4871
Батлер 5004 П
Баум 4751
Баутин Н. Н. 4804
Бейд 4892
Бейкер 4865
Белло 4970
Бергер 4916
Берли 4925
Берман Д. Л. 478
Бернайс 4909
Бешлин 4729, 4730
Билл 4868
Блан-Лапьер 4859
Блок 4801
Блумберг 4990
Болан 4985
Бохнер 4855
Брейха 4839 К
Брени 4883
Бройдо 5003 П
Брюне 4705 РЕЦ
Бухштаб А. А. 4713

В

Вайда 4877
Вайнберг Д. В. 4890
Важевский Т. 4803
Ван-дер-Варден 4897
Вейль 4692
Вельте 4826
Вилла 4894
Вилль 4798
Вильсон 4793
Виноградов А. А. 4753
Винтнер 4912
Войт С. С. 4821
Вольд 4876 РЕЦ
Воробьев Ю. В. 4844
Врынчану 4733
Вундерлих 4898
Вюнше 4874

Г

Гальярдо 4789
Гантмахер Ф. Р. 4741
Гаррис 4825 К
Гельфанд М. С. 4762
Герстенхейбер 4750
Гинсберг 4781
Глодан 4731
Голдберг 4760
Голдман 4885 РЕЦ
Гомес 4838 К
Готхардт 4918
Гнеденко Б. В. 4690, 4854, 4863
Греко 4747
Грушка 4691
Гудстейн 4706

Д

Даггетт 4934
Дарбо 4776
Дёйринг 4715
Джонс 4807
Джонс 4780
Джонсон 4943
Джоуэтт 4873
Диткин В. А. 4921
До 4703
Доремус 4987
Досс 4785
Дутка 4698
Дынкин Е. Б. 4770
Дю-Фор 4913
Дюфренуа 4720

Е

Еле 4892

З

Замель 4928
Зауэр 4811 РЕЦ

И

Имас-Янке 4687
Ингрехэм 4906
Исбелл 4740

К

Кавалларо 4887
Каве 4884
Калаби 4795
Кампе-де-Ферье 4858
Карлиц 4718
Карнап 4711 К
Каттанео 4828
Кац Г. И. 4749
Квапил 4993
Кекелия М. А. 4933 К
Кемпторы 4871
Кёхер 4717
Ким Е. Н. 4818
Киприянов И. А. 4787
Класс 4939
Кольри 4705 РЕЦ
Коразан 4734
Коржинек 4681
Кох 4797
Крейг 4875
Кришна-Ийер 4866
Круазо 4746
Круковский (Круковский-Синевич) Б. В. 4742
Крулль 4739
Ксерудакес 4732
Куайн 4710
Куайн 4712 РЕЦ
Кубанов 4950
Купер 4849
Кутуманос 4900

Л

Лайтхилл 4811 РЕЦ
Лебедев А. Н. 4922
ЛеВек 4719
Ледерман 4756
Лейдерман Ю. Р. 4919
Ленц 4792
Лефшец 4771 РЕЦ
Лёб 4880
Лёб 4708
Линдсет 5001 П
Линник Ю. В. 4853
Линь Хун-сунь 4915
Литлвуд 4752
Лодиджани 4774
Лоткин 4932 К
Лоран 4908
Лоренц 4832
Лоясевич 4802
Лу Ци-цзянь 4677
Льюк 4817
Любанский 4768
Любкин 4817
Люнцман 4926
Люстерник Л. А. 4921
Ляпунов А. А. 4777

М

Макнил 4914
Макфейл 4832
Мандельбройт 4788
Мардессич 4867
Мариц 4864
Марчевский 4683, 4772 4778
Маслов В. П. 4814
Мауден 5008
Мейсон 4923
Менчер 4815
Мерта 5011
Метакидес 4869
Мёснер 4735
Митринович 4808
Михок 4700
Море 4994
Мукхерджи 4835

Н

Наир 4870
Натуччи 4724
Ниномия 4810
Новак Й. 4764
Норткотт 4757
Нью 4924

О

Оби 4805
Обрешков Н. 4829
Овсеевич И. А. 4879
Оппенгейм 4723
Остроградский 4696
Отрадных Ф. П. 4694 К

П

Паккард 5006 П
Паккетт 4886 I

Палаццо 4888
Папич 4765
Патлах Д. И. 4929 К
Паше 4727
Пейн 4907
Перри 4936
Перрон 4726
Пизо 4720
Пикард 4882
Платрийе 4891
Плацер 4885 РЕЦ
Полак А. И. 4791
Понд 5007 П
Портер 4935
Пур 4796
Пуччи 4775
Пясецкий С. А. 4903

Р

Райчадхури 4905
Рейнвилл 4819
Рейнор 4736
Реммерт 4794
Реша 4868
Рёйшель 4889
Рипп 4872
Рич 4934
Роз 4982
Розенлихт 4795
Ролинс 4712 РЕЦ
Рослер 4865
Руффини 4693 РЕЦ
Рылл-Нардзевский 4773, 4778

С

Салие 4727
Сарджент 4843
Свердруп 4860
Свешников 4695
Сегре 4899
Сейвет 4948
Селе 4738
Серпинский 4779
Симода 4850
Ситников К. А. 4769
Скал 5001 П
Сколем 4707
Скотт 4873
Скотт 4896
Смит 4840 РЕЦ
Собчик 4771 РЕЦ
Соркин Ю. И. 4761
Спайс 4876 РЕЦ
Стейн 4917
Стюарт 4840 РЕЦ

Т

Такасу 4689
Тамагава 4716
Тамаш 4930
Тандберг-Ханссен 4822
Таррант 4927
Тауц 4991
Темпл 4851
Тесье 4755
Тойен 5005 П
Тольятти 4693 РЕЦ
Томас 4767
Томбер 4759
Торнхейм 4910
Тояма 4841 РЕЦ
Траутман Н. Ф. 4895 К
Трлифай Л. 4852 Д
Трон 4799 К
Троппер 4834
Туманян С. Х. 4862
Туран 4783

У

У Дэ-тао 4911
Уилкс 4996
Уитт 4935
Уишарт 4869
Унгер 4744
Уотсон 4721, 4722
Успенский А. К. 4920
Уэйнбергер 4816
Уэйт 4823

Ф

Фадини 4725
Федоров Г. Ф. 4800
Фейт 4748
Фёльнер 4878
Фиников С. П. 4701
Фландерс 4743
Фокс 4876 РЕЦ
Франкел 4913, 4935
Фрёйд 4782, 4786
Фукс 4738
Фулман 4881
Функе 4827

Х

Халмош 4845
Харингтон 4830
Хартман 4912
Хаскинд М. Д. 4820
Хенриксен 4740
Херлер 4991
Хислоп 4830
Хубер 4824

Ц

Целлер 4833
Цулауф 4714
Цянь Вэй-чжан 4678, 4836

Ч

Чавчанидзе В. В. 4856, 4857
Чеботарев Г. Н. 4812 Д
Чех 4680
Чехата 4754
Чжу 4937
Чэн Юань 4702

Ш

Шапиро З. Я. 4809
Шарский 4806
Шафер 4758
Шварц 4682
Шепердсон 4709
Шершевский Е. П. 4902
Шефер 4704
Шефке 4846
Шметтерер 4686
Шмульян Ю. Л. 4847, 4848
Шолендер 4763
Штейн 4794
Шуликовский В. И. 4901

Э

Эгрен 5012 П
Эймерин 4865
Эллиотт 4963
Энгберт 4984
Эрдёш 4790
Эстрин М. И. 4813

Ю

Юрен 4876 РЕЦ

Я

Янг 4932 К
Янкович 4728
Яно 4841 РЕЦ, 4904

A

Agnew R. P. 4831
Aigrain P. R. 5012 П
Alexiewicz A. 4842
Amerine M. A. 4865
Antonescu M. 4893
Aotani K. 4766

B

Bade W. L. 4892
Baeschlin C. F. 4729, 4730
Bagchi H. D. 4835
Baker G. A. 4865
Banachiewicz T. 4745
Barbălat I. 4837
Barclay W. D. 4871
Baum J. D. 4751
Beall G. 4868
Bello F. 4970
Berger E. R. 4916
Bernays P. 4909
Blanc-Lapierre A. 4859
Block H. D. 4801
Blomberg H. 4990
Bochner S. 4855
Bolant R. 4985
Brejcha J. 4839 К
Breny H. 4883
Broido D. 5003 П
Brunet P. 4705 РЕЦ
Burley F. H. 4925
Butler Th. M. 5004 П

C

Calabi E. 4795
Carlitz L. 4718
Carnap R. 4711 К
Cattaneo P. 4828
Caullery M. 4705 РЕЦ
Cavallaro V. G. 4887
Cavé 4884
Chehata C. G. 4754
Chu J. C. 4937
Cooper J. L. B. 4849
Corazão A. 4734
Coutoumanos A. 4900
Craig C. C. 4875
Croisot R. 4746
Čech E. 4680

D

Daggett N. L. 4934
Darbo G. 4776
Deaux R. 4703
Deuring M. 4715
Doremus J. A. 4987
Doss R. 4785
Du Fort E. C. 4913
Dufresnoy J. 4720
Dutka J. 4698

E

Elliott W. S. 4963
Engbert W. 4984
Erdös P. 4790

F

Fadini A. 4725
Feit W. 4748
Flanders H. 4743
Fox K. A. 4876 РЕЦ
Følner E. 4878
Frankel S. P. 4913, 4935
Freud G. 4782, 4786
Fuchs L. 4738
Fullman R. L. 4881
Funke L. 4827

G

Gagliardo E. 4789
Gerstenhaber M. 4750
Ginsburg S. 4781
Gloden A. 4731
Goldberg S. I. 4760
Goldman S. 4885 РЕЦ
Gomes A M. 4838 К
Goodstein R. L. 4706

Gotthardt E. 4918
Greco D. 4747

H

Halmos P. R. 4845
Harington C. F. 4830
Harris A. H. 4825 К
Hartman Ph. 4912
Henriksen M. 4740
Herrler 4991
Hruška V. 4691
Huber A. 4824
Hyslop J. M. 4830

I

Imaz Iahnke C. 4687
Ingraham R. L. 4906
Isbell J. R. 4740
Isle D. E. S. 4949

J

Janković Z. 4728
Jehle H. 4892
Johnson L. R. 4943
Jones D. S. 4807
Jones F. B. 4780
Jowett G. H. 4873
Juréen L. 4876 **РЕЦ**

K

Kampé de Fériet J. 4858
Kempthorne O. 4871
Klass Ph. 4939
Koch K. 4797
Koecher M. 4717
Kořínek V. 4681
Krishna-Iyer P. V. 4866
Krull W. 4739
Kubanoff J. H. 4950
Kvapil V. 4993

L

Ledermann W. 4756
Lefschetz S. 4771 **РЕЦ**
Lenz H. 4792
LeVeque W. J. 4719
Lighthill M. J. 4811 **РЕЦ**
Lindseth C. O. 5001 **II**
Littlewood D. E. 4752
Lodigiani B. 4774
Loeb M. 4880
Łojasiewicz S. 4802
Lorent H. 4908
Lorentz G. G. 4832
Lotkin M. 4932 К
Löb M. H. 4708
Lubański M. 4768
Lubkin Y. L. 4817
Luke Y. L. 4817
Lünzmann K. 4926

M

Macneal R. H. 4914
Macphail M. S. 4832
Mandelbrojt S. 4788
Marczewski E. 4683, 4772, 4778
Mardessich B. 4867
Maritz J. S. 4864
Mason S. J. 4923
Maurer P. 4994
Mencher A. G. 4815
Metakides Th. 4869
Mihoc G. 4700
Mitrinovitch D. S. 4808
Moessner A. 4735
Mouden L. H. 5008
Mukherji B. N. 4835
Murtagh J. M. 5011

N

Nair K. R. 4870
Natucci A. 4724
New R. W. 4924
Ninomiya N. 4810
Northcott D. G. 4757

O

Obi Ch. 4805
Oppenheim A. 4723
Ostrogradschi M. V. 4696

P

Paasche I. 4727
Packard H. S. 5006 **II**
Palazzo E. 4888
Papić P. 4765
Payne W. T. 4907
Perron O. 4726
Perry C. L. 4936
Picard H. C. 4882
Pisot Ch. 4720
Platrier Ch. 4891
Platzer H. 4885 **РЕЦ**
Pond C. E. 5007 **II**
Poor V. C. 4796
Porter J. D. 4935
Pucci C. 4775
Puckette C. C. 4886

Q

Quine W. V. 4710
Quine W. van O. 4712 **РЕЦ**

R

Rainville E. D. 4819
Rawlins F. I. G. 4712 **РЕЦ**
Raychaudhuri A. K. 4905
Raynor G. E. 4736
Remmert R. 4794
Rescia R. R. 4868
Reuschel A. 4889
Rich E. S. 4934
Rippe D. D. 4872
Roessler E. B. 4865
Rose G. M. 4982
Rosenlicht M. 4795
Ruffini 4693 **РЕЦ**
Ryll-Nardzewski C. 4773, 4778

S

Sahmel P. 4928
Salié H. 4727
Sargent W. L. C. 4843
Sauer R. 4811 **РЕЦ**
Savet P. H. 4948
Scal R. K.-F. 5001 **II**
Schaefer C . 4704
Schafer R. D. 4758
Schäfke F. W. 4846
Schmetterer L. 4686
Schwarz Š. 4682
Scott J. F. 4873
Scott T. 4896
Segre B. 4899
Shepherdson J. C. 4709
Shimoda I. 4850
Sholander M. 4763
Sierpinski W. 4779
Skolem Th. 4707
Smith L. P. 4840 **РЕЦ**
Sobczyk A. 4771 **РЕЦ**
Spies O. R. 4876 **РЕЦ**
Stein K. 4794
Stein M. L. 4917
Stewart R. M. 4840 **РЕЦ**
Sverdrup E. 4860
Sveşnicov A. G. 4695
Szarski J. 4806
Szele T. 4738

T

Takasu T. 4689
Tamagawa T. 4716
Tamás Z. 4930
Tandberg-Hanssen E. 4822
Tarrant J. 4927
Tautz 4991
Teissier M. 4755
Temple G. 4851
Thomas G. H. M. 4767
Thron W. 4799 К
Togliati E. G. 4693 **РЕЦ**
Toien P. J. 5005 **II**
Tomber M. L. 4759
Tornheim L. 4910
Tropper A. M. 4834
Turán P. 4783

U

Unger H. 4744

V

Vajda S. 4877
Van der Waerden B. L. 4897
Velte W. 4826
Villa M. 4894
Vrânceanu G. 4733

W

Wait J. R. 4823
Watson G. L. 4721, 4722
Weil A. 4692
Weinberger H. F. 4816
Wilkes M. V. 4996
Will H. 4798
Wilson R. 4793
Wintner A. 4912
Wishart J. 4869
Witte L. de 4935
Wold H. 4876 **РЕЦ**
Wunderlich W. 4898
Wünsche G. 4874

X

Xeroudakes G. F. 4732

Y

Yano 4904
Young M. E. 4932 К

Z

Zeller K. 4833
Zulauf A. 4714

吳德鴻 4911
林鴻蓀 4915
矢野 4941
程宪 4702
遠山啟 4841
錢偉長 4678, 4836
陸啓鏗 4677

Технический редактор *К. И. Игнаткова*